

Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2009-2010

Tesi di Laurea Specialistica

*Simulazione d'interazione tra sistemi
complessi: reti neurali*

Candidato

Piccinini Nicola

Relatore

*Chiar.mo Prof.
Leone Fronzoni*

Indice

Motivazione.....	5
Capitolo 1 - Processi di rinnovo non poissoniani.....	7
1.1 Caratteristiche di base	7
1.2 Alcune conseguenze	10
1.3 Invecchiamento	11
1.4 Risposta lineare	12
1.5 Risposta a perturbazioni “classiche”	14
1.6 Risposta a perturbazioni complesse	16
Capitolo 2 - Criticità auto organizzata e processi di ramificazione	19
2.1 Introduzione alla criticità auto-organizzata.....	19
2.2 Processi di ramificazione	22
2.3 Effetti di bordo	25
2.4 Dissipazione e SOC	25
2.5 Conseguenze della criticità	26
Capitolo 3 - Reti neurali e loro simulazione	29
3.1 Reti neurali	29
3.2 Cascate neurali	32
3.3 Il modello	33
3.4 Alcuni dettagli sull'implementazione	36
Capitolo 4 - Risultati relativi alla teoria NPR	39
4.1 Esponenti di scala.....	39
4.2 Andamento e varianza	40
4.3 Funzioni di autocorrelazione.....	45
4.4 Spettro di potenza.....	48
4.5 Complexity matching	50
Capitolo 5 - Analisi delle dimensioni delle cascate	53
5.1 Analisi preliminari.....	53
5.2 Varianza.....	60
5.3 Spettro di potenza e autocorrelazione	61
5.4 Perturbazione a gradino.....	66
5.5 Cross Correlation	66
Capitolo 6 - Conclusioni e ulteriori sviluppi.....	69
6.1 Conclusioni	69
6.2 Sviluppi futuri	70
Bibliografia	71
Ringraziamenti	75

Motivazione

Lo studio dei sistemi complessi ha avuto uno sviluppo notevole negli ultimi anni. La possibilità di effettuare simulazioni sempre più dettagliate è stata spesso sfruttata in questo ambito e per certi versi ha fornito un contributo importante alla nascita stessa di questo ramo della scienza.

Molta attenzione è stata data ai sistemi dinamici che presentano invarianza di scala spaziale o temporale. Questo tipo di comportamento è molto diffuso in natura: si trova in fenomeni molto diversi tra loro come, ad esempio, la turbolenza, i terremoti e le cascate neuronali.

Nella tesi costruiremo reti neurali e ne analizzeremo le proprietà sotto questa ottica. La novità di questo lavoro consiste nell'aver posto in interazione sistemi che esibiscono esponenti di scala diversi sia per le grandezze spaziali sia per gli intervalli di tempo tra gli eventi. Verranno presentati alcuni risultati che, a conoscenza dell'autore, non hanno ancora una base teorica.

L'organizzazione di questa tesi è la seguente: nel primo capitolo viene esposta la teoria dei processi di rinnovo non poissoniani (*Non-Poisson Renewal events* o *NPR*); nel secondo capitolo sono introdotti la criticità auto organizzata ed i processi di ramificazione; il terzo capitolo è dedicato alle reti neurali ed al modello di simulazione utilizzato; il quarto capitolo contiene l'analisi dei risultati dal punto di vista NPR; il quinto capitolo è dedicato alle proprietà spaziali risultanti dalle simulazioni; il sesto ed ultimo capitolo riporta le conclusioni e gli sviluppi futuri.

Capitolo 1

Processi di rinnovo non poissoniani

1.1 Caratteristiche di base

Esistono molti sistemi, in diversi ambiti scientifici, che sono caratterizzati dall'esistenza di eventi cruciali: momenti di intensa attività che separano periodi di relativa calma. Alcuni esempi sono la turbolenza [28], i mercati, i coni di sabbia, l'attività cerebrale [29], la mappa logistica e quella di Manneville ed alcune teorie circa l'evoluzione delle specie.

Il fatto che questo tipo di andamento si verifichi in sistemi complessi tanto diversi suggerisce che esso sia in qualche modo un indice della complessità. Quest'ultima è il risultato di un bilanciamento tra ordine e caos e generalmente comporta la nascita di strutture auto-organizzate. La dinamica di queste strutture, nel campo dei sistemi complessi, viene divisa in classi di universalità, come nella teoria dei fenomeni critici. Il parallelo tra i due ambiti non si ferma qui, in quanto, in entrambi i casi, le classi di universalità non vengono determinate solamente dalle caratteristiche microscopiche del sistema, ma sono espressione di proprietà più generali.

Nel corso degli anni sono stati presentati molti modelli che riescono a descrivere diversi aspetti della complessità. Tuttavia non esiste ancora una teoria unificata.

Il modello che analizzeremo è già stato applicato con successo allo studio della turbolenza debole nei cristalli liquidi nematici [28] e all'attività cerebrale a riposo [29]. Questa tesi si inserisce nello stesso contesto di ricerca e mira a verificarne alcuni aspetti nell'ambito delle reti neurali.

Nel modello, i momenti di intensa attività sono chiamati eventi di rinnovo e sono visti come dinamiche veloci che sono in relazione con la creazione e la distruzione di strutture auto-organizzate. Queste, a loro volta, determinano le

proprietà macroscopiche del sistema complesso in esame.

Un evento di rinnovo è un processo che cancella la memoria del sistema in modo tale che due eventi consecutivi risultano completamente scorrelati. A prima vista questa non sembra un buon punto di partenza per costruire una teoria dei sistemi complessi, che sono caratterizzati dall'avere una lunga memoria. Tuttavia la bontà di questa definizione risulta più chiara se consideriamo che la cancellazione della memoria avviene esclusivamente durante gli eventi di rinnovo. Nei periodi di calma relativa, detti zone laminari, il sistema presenta una forte memoria ed una forte correlazione. Inoltre, questa cancellazione della memoria riguarda soltanto i processi che portano al verificarsi degli eventi di rinnovo stessi e non tocca altre caratteristiche indipendenti del sistema. Infine, in un sistema reale, i processi di rinnovo possono essere locali; in questo caso non si ha un reset di tutto il sistema.

Cosa è, in pratica, un evento di rinnovo? La risposta dipende dal sistema complesso in esame: può essere un crash nel mercato finanziario, l'estinzione di specie animali, un terremoto o una cascata neuronale, solo per fare alcuni esempi. Indipendentemente dal particolare caso in esame, tutti i sistemi dominati da eventi hanno proprietà che dipendono unicamente dalle caratteristiche di questi ultimi.

Per identificare queste proprietà iniziamo col definire la funzione $\psi(t)$. Per comprendere bene il suo significato consideriamo un sistema in cui si è appena verificato un evento di rinnovo. Definiamo questo come l'istante in cui $t=0$. Ebbene, la $\psi(t)$ risponde alla seguente domanda: qual è la probabilità che il prossimo evento accada tra t e $t+dt$? Nel gioco del lotto è come chiedersi tra quanto tempo (probabilisticamente) uscirà il 27 sulla ruota di Firenze, subito dopo che esso è stato estratto. Più formalmente, questo fornisce la distribuzione di probabilità dei tempi di attesa nel momento immediatamente successivo al verificarsi di un evento. $\psi(t)$ naturalmente è normalizzata in modo che $\int_0^\infty \psi(t)dt = 1$.

Consideriamo adesso la probabilità di sopravvivenza, ossia la probabilità che, dato un evento all'istante iniziale, non si verifichino altri eventi fino al tempo t .

Essa è:

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t \psi(t') dt' \quad (1.1)$$

Chiaramente si ha: $\psi(t) = -\Psi'(t)$

Adesso consideriamo il tasso di produzione di eventi, cioè la probabilità che, dato un evento al tempo 0, l'evento successivo accada al tempo t. Essa è data dalla $\psi(t)$ condizionata dal fatto che non vi siano eventi fino al tempo t:

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} = -\frac{d \ln \Psi}{dt} \quad (1.2)$$

Per comprendere la differenza tra la $\psi(t)$ e la $g(t)$ si può utilizzare ancora l'esempio precedente del lotto: in questo parallelo la $g(t)$ indica la probabilità che all'estrazione successiva esca il 27 sulla ruota di Firenze, considerato che tale numero è uscito t=n volte fa. Se gli eventi sono il risultato di fluttuazioni casuali, come nella meccanica statistica ordinaria, la probabilità per unità di tempo di produrre un evento deve essere costante. Indicando questa costante con $1/\tau$, sostituendola a $g(t)$ e integrando si ottiene:

$$\psi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.3)$$

Che è proprio la distribuzione di Poisson per i tempi.

Questo andamento esponenziale non trova riscontro nella realtà per quanto riguarda i sistemi complessi dominati da eventi. Proprio da questo fatto deriva l'acronimo NPR: Non-Poisson Renwal Events. La complessità, infatti, modifica profondamente questo comportamento; per avere una idea intuitiva di come ciò avvenga, basta pensare al fatto che all'interno di molti sistemi complessi sono presenti lunghe correlazioni temporali, quindi gli eventi di rinnovo non sono il risultato di fluttuazioni casuali, ma sono espressioni di una dinamica sottostante. Per numerosi sistemi complessi la distribuzione temporale degli eventi segue una legge a potenza.

Una buona scelta per la loro $\psi(t)$ è data da:

$$\psi(t) = (\mu - 1) \frac{T^{\mu-1}}{(t+T)^\mu} \quad (1.4)$$

dove il fattore costante viene dalla normalizzazione e T è un parametro che indica il tempo oltre il quale si verifica l'andamento a potenza inversa (senza di esso al denominatore la funzione non può essere normalizzata tra 0 e $+\infty$). L'esponente μ permette una caratterizzazione della lunghezza delle correlazioni ed è chiamato indice di complessità in quanto parametrizza le proprietà fondamentali del sistema preso in esame. La scelta (1.4) è giustificata da vari modelli e osservazioni sperimentali quali la turbolenza, l'attività cerebrale a riposo, i terremoti, le cascate neuronali e l'intermittenza della mappa di Manneville.

Con questa scelta per la $\psi(t)$, abbiamo:

$$\Psi(t) = \left(\frac{T}{t+T} \right)^{\mu-1} \quad (1.5)$$

$$g(t) = \frac{\mu-1}{t+T} \quad (1.6)$$

1.2 Alcune conseguenze

La (1.4) ha conseguenze molto profonde sulle proprietà statistiche attese dei sistemi dominati da eventi. Per visualizzarle più facilmente possiamo considerare un random walk su un reticolo in cui il camminatore si sposta su una posizione adiacente scelta casualmente ad intervalli di tempo dettati dalla $\psi(t)$. Un altro modo di visualizzarle è quello utilizzato da P. Allegrini e altri in [13]: un sistema dicotomico in cui, sempre ad intervalli di tempo dettati dalla $\psi(t)$, si sorteggia il nuovo stato.

Innanzitutto notiamo che la (1.4) può essere normalizzata (e quindi risulta definita) solo per $\mu > 1$.

Vediamo adesso come si comportano i momenti della $\psi(t)$.

Andando ad analizzare il momento secondo, la varianza, si vede che essa diverge per $\mu < 3$. Per questi valori, quindi, il processo non obbedisce al teorema del limite centrale: esso non è asintoticamente gaussiano.

Per quanto riguarda la media, notiamo che essa diverge per $\mu < 2$. Questo fatto ha conseguenze molto profonde in quanto l'ipotesi ergodica, uno dei fondamenti della meccanica statistica, in questo caso viene meno. Il calcolo del valore medio dei tempi di attesa tra un evento e il successivo su un ensemble di Gibbs non fornisce, quindi, lo stesso risultato dello stesso calcolo effettuato su un singolo sistema nel limite di tempi lunghi. In formule si ha:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \neq \langle f(x) \rangle \quad (1.7)$$

Per questo, all'atto pratico, risulta impossibile misurare il valor medio avendo a disposizione una unica copia del sistema. Nel seguito faremo spesso riferimento alle differenze tra sistemi con $\mu > 2$ (ergodici) e sistemi con $\mu < 2$ (non ergodici).

1.3 Invecchiamento

Un'altra caratteristica dei sistemi NPR è quella dell'invecchiamento. Considerando l'equazione (1.6), infatti, vediamo che il tasso di produzione di eventi non è stazionario, bensì diminuisce col tempo: più è distante l'ultimo processo di rinnovo e meno è probabile che ve ne sia uno nell'intervallo considerato. Questo comportamento viene chiamato “negative aging”. Al contrario, quando la produzione di un evento diventa sempre più probabile all'aumentare del tempo trascorso dall'ultimo, si parla di “positive aging”.

Per evidenziare le conseguenze della (1.6) consideriamo un ensemble di sistemi, ognuno preparato in modo da avere un evento al tempo $t=0$. I tempi di attesa per il primo evento sono regolati dalla $\psi(t)$ su ognuno di essi. Se noi lasciamo evolvere l'ensemble e torniamo ad osservarlo ad un tempo t' , i tempi di attesa, **calcolati sempre a partire da $t=0$** , non sono più distribuiti secondo la $\psi(t)$ o la $\psi(t-t')$ in quanto i sistemi (con altissima probabilità) non hanno contemporaneamente

eventi di rinnovo al tempo $t=t'$. Inoltre ve ne sono alcuni che hanno avuto almeno un processo di rinnovo tra $t=0$ e $t=t'$.

Per ricavare la nuova ψ , detta distribuzione invecchiata, iniziamo col considerare che, senza eventi di rinnovo tra $t=0$ e $t=t'$, la distribuzione è ancora la ψ originale. Con un solo evento nello stesso intervallo, si ha $\psi(t, t') = \int_0^{t'} \psi(t'') \psi(t - t'') dt''$. Questa formula si spiega considerando che la distribuzione dei tempi di attesa è data dalla ψ , quindi, per ottenere la distribuzione cercata, è necessario moltiplicare la probabilità che l'evento sia accaduto al tempo t'' (che è proprio $\psi(t'')$) per la ψ traslata di t'' ed integrare su tutti i t'' compresi tra 0 e t' . Con 2 eventi di rinnovo, abbiamo $\psi(t, t') = \int_0^{t'} \psi_2(t'') \psi(t - t'') dt''$, dove $\psi_2(t'')$ indica la probabilità di avere due eventi, di cui il secondo al tempo t'' (visto che sono eventi di rinnovo è irrilevante in quale momento è avvenuto il primo). Proseguendo nel ragionamento si vede che la distribuzione invecchiata è la seguente:

$$\psi(t, t') = \psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t'} \psi_n(t'') \psi(t - t'') dt'' \quad (1.8)$$

Grigolini e altri hanno dimostrato che per $\mu > 2$ e $t' \rightarrow \infty$ la (1.8) raggiunge la condizione stazionaria:

$$\psi_{\infty}(t - t' \equiv \tau) = (\mu - 2) \frac{T^{\mu-2}}{(\tau + T)^{\mu-1}} \quad (1.9)$$

Per $1 < \mu < 2$ non viene mai raggiunta una condizione stazionaria: la distribuzione dei tempi di attesa tra gli eventi continua a mutare indefinitamente. Questo fenomeno viene chiamato “*perennial aging*” e, come vedremo, ha conseguenze profonde sulla risposta del sistema alle perturbazioni e non solo.

1.4 Risposta lineare

Dato il modello di sistema dominato da eventi che abbiamo presentato, possiamo considerare due modi distinti per perturbarlo: nel primo, detto modello

fenomenologico, si agisce solo durante gli eventi di rinnovo mentre nel secondo, detto modello dinamico, si agisce soltanto durante le zone laminari.

Consideriamo una perturbazione $\xi_p(t)$ tale che $\langle \xi_p^2 \rangle = 1$. Secondo il teorema di fluttuazione e dissipazione la risposta del sistema è data da [14]:

$$\langle \xi_s(t) \rangle = -\varepsilon \int_0^t \chi(t, t') \xi_p(t') dt' \quad (1.10)$$

dove ε regola l'intensità della perturbazione. Per un sistema che obbedisce alla meccanica statistica ordinaria la funzione di risposta lineare, χ , è stazionaria (dipende solo dalla differenza dei tempi) ed è data da:

$$\chi(t-t') = \frac{d}{dt} \langle \xi_s(t) \xi_s(t') \rangle \quad (1.11)$$

Come abbiamo visto, un sistema complesso possiede caratteristiche che lo distinguono nettamente dai sistemi per i quali vale la meccanica statistica ordinaria. Non è detto, quindi, che le relazioni (1.10) e (1.11) continuino a valere anche in questo caso.

In [3] Allegrini e altri propongono una nuova teoria di risposta lineare per sistemi dicotomici caratterizzati da eventi di rinnovo non poissoniani. Essi trovano che in questo caso la (1.10) è ancora valida, ma la (1.11) deve essere modificata a seconda del tipo di perturbazione.

Consideriamo modello fenomenologico. Poiché in questo caso il sistema viene perturbato solo durante gli eventi e dato che gli eventi cancellano la memoria del sistema, si può supporre che la χ dipenda dalla distanza temporale dall'ultimo evento. In [3] viene mostrato che:

$$\chi(t, t') = P(t') \Psi(t-t') \quad (1.12)$$

dove $P(t')$ è la probabilità che, dato un evento al tempo $t=0$, ve ne sia uno qualsiasi al tempo t' . Nel limite di tempi lunghi si ha, nel caso non ergodico, $P(t) \propto 1/t^{2-\mu}$ e, nel caso ergodico, $P(t) = 1/\langle \tau \rangle$, dove $\langle \tau \rangle$ è il tempo medio di attesa tra gli eventi. Ψ è la survival probability: l'evento al tempo t' influisce sul

sistema al tempo t soltanto se non avvengono altri processi di rinnovo tra i due istanti.

Per un sistema ergodico infinitamente invecchiato la (1.12) si scrive:

$$\chi(t, t') = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \left(\frac{T}{t+T} \right)^{\mu-1} = (\mu-2) \frac{T^{\mu-2}}{(t+T)^{\mu-1}} \quad (1.13)$$

Consideriamo adesso il modello dinamico. In questo caso la perturbazione agisce solo durante le zone laminari e porta ad una modifica del percorso che conduce al verificarsi dell'evento successivo. Al primo ordine, quindi, si intuisce che una perturbazione che agisce al tempo t' fa sentire il suo effetto attorno al tempo in cui il sistema imperturbato avrebbe avuto il suo primo evento. Sempre nel caso di NPR dicotomici si trova che la χ coincide proprio con la distribuzione invecchiata (1.8). Per i dettagli vedere [3]. In questo caso si palesa la complessità del sistema: la (1.8), infatti, evolve nel tempo. Questo fa sì che la risposta dipenda anche dalla storia del sistema stesso. Inoltre, se nel caso ergodico si ha una distribuzione infinitamente invecchiata stazionaria, nel caso non ergodico si ha il fenomeno del perennial aging!

Se confrontiamo la (1.13) con la (1.9), che è la distribuzione (1.8) infinitamente invecchiata (con $\mu > 2$), vediamo che sono identiche: un sistema ergodico infinitamente invecchiato risponde identicamente alle perturbazioni che ricadono nel modello fenomenologico ed a quelle che ricadono nel modello dinamico.

Consideriamo adesso la funzione di autocorrelazione stazionaria per un sistema dicotomico dominato da eventi. Nelle zone laminari le variabili globali restano costanti, mentre sono statisticamente scorrelate a cavallo di un evento. Per questo motivo la funzione di autocorrelazione è proprio la probabilità di sopravvivenza invecchiata. Dalla relazione (1.1) segue che in questo caso la (1.11) risulta ancora valida.

1.5 Risposta a perturbazioni “classiche”

Utilizzando le equazioni precedenti per trovare la risposta di un sistema

complesso ad un segnale a gradino si dimostra che [3]:

$$\langle \xi_s(t) \rangle = \varepsilon(1 - \Psi(t)) \quad (1.14)$$

nel caso fenomenologico e:

$$\langle \xi_s(t) \rangle = \varepsilon(\mu - 1) \left[1 - \frac{T}{\mu - 1} P(t) \right] \quad (1.15)$$

nel caso dinamico, dove la $P(t)$ è la stessa di (1.12).

Onsager in [15] pubblicò il principio secondo cui un sistema in uno stato di non equilibrio rilassa verso l'equilibrio seguendo la funzione di autocorrelazione stazionaria del sistema stesso. La (1.14) generalizza il principio di Onsager nel caso fenomenologico in quanto mostra che il rilassamento avviene seguendo una funzione di autocorrelazione del sistema non stazionaria: la survival probability giovane. (Come abbiamo visto nel paragrafo precedente la funzione di autocorrelazione stazionaria del sistema in questo caso è la survival probability invecchiata). Nel modello dinamico, invece, il sistema rilassa seguendo la $P(t)$. Quest'ultima non è una funzione di autocorrelazione del sistema, quindi, in questo caso, il principio di Onsager viene violato.

Bisogna notare che questi risultati valgono nel caso in cui la perturbazione inizia ad agire sul sistema quando questo è all'equilibrio. Il rilassamento da uno stato di non equilibrio modifica le equazioni precedenti aggiungendo la survival probability del sistema, tenuto conto dell'invecchiamento. Questo significa che l'andamento della risposta del sistema è il seguente:

$$\langle \xi(t) \rangle = A + \frac{B}{t^n} + C\Psi(t, t') \quad (1.16)$$

Dove A, B e C sono costanti, n può essere ricavato dalle formule precedenti a seconda dei casi (modello fenomenologico o dinamico, caso ergodico o non ergodico) e l'ultimo termine è presente solo nel caso di rilassamento da uno stato di non equilibrio.

Consideriamo adesso una perturbazione sinusoidale. In [16] viene mostrato che

la risposta asintotica ad una perturbazione $\xi_p(t) = \cos(\omega t)$ è data da:

$$\langle \xi(t) \rangle \cong \varepsilon \left(\frac{A}{t^{\mu-1}} + \frac{B \cos\left(\frac{\pi\mu}{2} + \omega t\right)}{t^{2-\mu}} \right) \quad (1.16)$$

nel modello fenomenologico e da

$$\langle \xi(t) \rangle \cong \varepsilon \frac{A' \cos\left(\frac{\pi\mu}{2} + \omega t\right)}{t^{2-\mu}} \quad (1.17)$$

nel modello dinamico. A, B e A' possono essere considerati parametri di fitting (una loro espressione esplicita è stata calcolata solo per sistemi NPR dicotomici). In queste condizioni, come vediamo, la risposta alla perturbazione sinusoidale decade col tempo. Questo è uno dei risultati più sorprendenti dovuti al teorema di fluttuazione e dissipazione per sistemi dominati da eventi di rinnovo non poissoniani. Sembrerebbe, quindi, che il sistema in questo caso non segua la teoria della risposta lineare. In realtà la risposta lineare è ancora valida, a patto di considerare gli eventi di rinnovo, come dimostrato da Allegrini e altri in [1]. Con $\mu > 2$ non si osserva questo comportamento: il sistema continua a rispondere alle perturbazioni sinusoidali.

1.6 Risposta a perturbazioni complesse

Un'altra proprietà interessante dei sistemi dominati da eventi è il cosiddetto complexity matching, dimostrato da Allegrini e altri in [17] per il modello dinamico ed in [18] per il quello fenomenologico. Con $\mu < 2$ il sistema, nonostante non risponda ad una perturbazione sinusoidale, risponde ad una perturbazione complessa. In questo caso esso eredita in parte le proprietà frattali della perturbazione. Inoltre, se $\mu_p < \mu_s$ (dove p ed s stanno per “perturbazione” e “sistema”), queste ultime diventano predominanti su tempi lunghi, visto che la perturbazione ha le code più lunghe.

Nel caso ergodico, come prevedibile, si ottengono gli stessi risultati: questo non desta molta sorpresa in quanto il sistema risponde anche a segnali sinusoidali,

Oltre a ciò, se andiamo ad analizzare la cross correlation massima tra il sistema e la perturbazione al variare dei rispettivi μ , otteniamo il grafico 1.1 per il modello dinamico. Esso indica che un sistema non ergodico non risponde ad una perturbazione ergodica, mentre un sistema ergodico segue fedelmente una perturbazione non ergodica.

Analizzando la retta $\mu_p = \mu_s$, si vede che il massimo della correlazione si ha quando entrambi valgono 2. Come vedremo, in questo caso lo spettro di potenza dei sistemi va come $1/f$.

Uno degli scopi di questa tesi è quello di testare questa previsione teorica nel caso delle reti neurali.

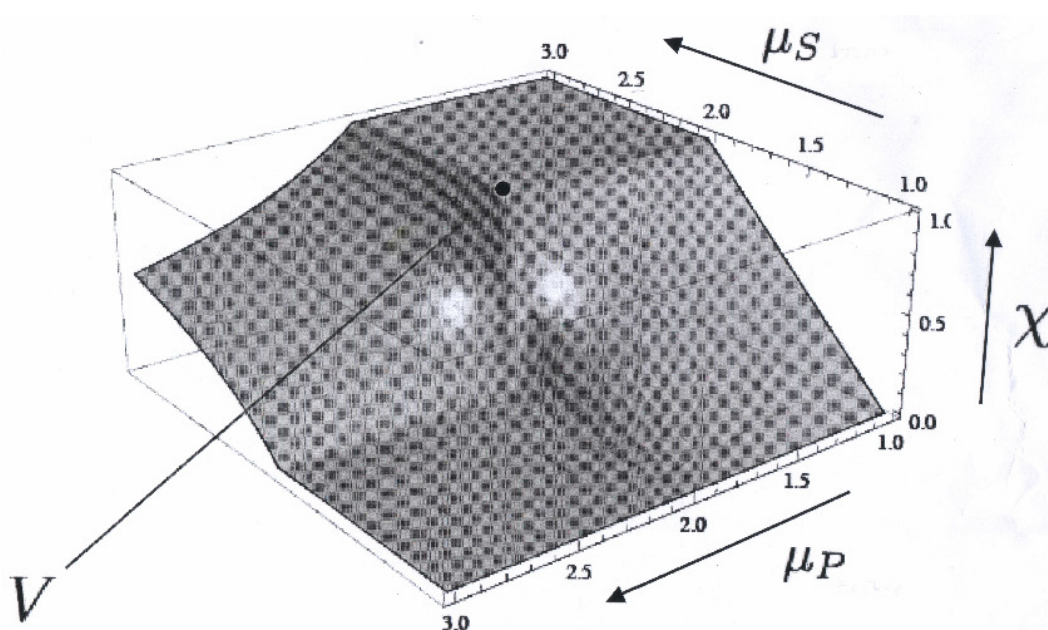


Fig 1.1: Complexity matching (fonte: [21]). Il grafico mostra la cross-correlation tra la perturbazione, con indice di complessità μ_p , e le fluttuazioni del sistema, con indice di complessità μ_s . Come vediamo, la massima correlazione si ha nel caso $2 < \mu_s < 3$ e $1 < \mu_p < 2$: un sistema ergodico risponde fortemente ad una perturbazione non ergodica. Nel caso opposto la correlazione è nulla: un sistema non ergodico non risponde ad una perturbazione ergodica.

Capitolo 2

Criticità auto organizzata e processi di ramificazione

2.1 Introduzione alla criticità auto-organizzata

In questo capitolo affronteremo il tema della complessità da un punto di vista diverso. Se l'approccio precedente era incentrato sulle conseguenze di processi di rinnovo i cui tempi di attesa seguono leggi a potenza, adesso l'attenzione sarà puntata principalmente sulle dimensioni spaziali degli eventi.

Vi sono molti fenomeni in natura che possono essere descritti da leggi che vanno come l'inverso di una potenza.

Una caratteristica molto interessante di queste leggi è l'invarianza di scala (*scale free*): data $f(x) = bx^{-\alpha}$, si ha $f(cx) = bc^{-\alpha}x^{-\alpha} = c^{-\alpha}f(x)$. Questa relazione indica l'assenza di una grandezza caratteristica relativa ai fenomeni osservati: con $\alpha=2$, ad esempio, si ha che per ogni evento grande 10 unità arbitrarie (u.a.), ve ne sono 4 di dimensione 5 u.a. e per ogni evento tanto grande da essere misurato 10000 u.a., ve ne sono 4 che sono costituiti da 5000 u.a.

Le transizioni di fase del secondo ordine (che non hanno calore latente associato) possono essere caratterizzate da parametri noti come esponenti critici: la capacità termica, ad esempio, varia secondo una legge a potenza in prossimità della temperatura critica. In ambiti più generali, svariati fenomeni naturali come terremoti, incendi, reazioni chimiche e le stesse cascate neuronali sono caratterizzati da quantità che vanno come l'inverso di una potenza con esponente α (l'uso di una lettera diversa serve per marcare maggiormente la differenza col capitolo precedente). α viene chiamato solitamente esponente di scala.

La differenza principale tra le transizioni di fase del secondo ordine e gli altri fenomeni elencati consiste nel fatto che per questi ultimi non è necessario regolare manualmente un parametro (come la temperatura) affinché esprimano leggi a potenza: essi si organizzano autonomamente in modo da raggiungere quello che, per

analogia, viene chiamato il loro punto critico.

Una spiegazione di questo comportamento fu proposta nel 1987 da P. Bak, C. Thang e K. Wiesenfeld [4]. Nel loro articolo introdussero il concetto di criticità auto-organizzata (*self organized criticality* o *SOC*) secondo cui i sistemi dinamici con molti gradi di libertà spaziale tendono ad evolvere verso uno stato critico a seguito di un'azione esterna "lenta" rispetto alle dinamiche interne. In altre parole, i sistemi dinamici che presentano SOC hanno un punto critico come attrattore.

Per esemplificare quanto detto sopra consideriamo un reticolo che può contenere una colonna di granelli su ogni posizione. Questo viene chiamato modello a pila di sabbia. L'azione esterna consiste nello scegliere un sito a caso ed aggiungervi un granello. Se la pila presente su una posizione arriva a 4 unità, crolla sui siti adiacenti non diagonali. (L'altezza della pila, in questo modello molto schematico, può rappresentare, in maniera un poco più realistica, la pendenza della superficie in quel punto.) Ovviamente può accadere che i siti che hanno ricevuto i granelli si trovino ora ad avere un'altezza superiore al valore di soglia. Si capisce quindi che l'aggiunta di un granello può generare una sequenza di crolli: una vera e propria frana (che può essere chiamata cascata, valanga ecc a seconda del particolare modello utilizzato). Le posizioni sul bordo del reticolo hanno un ruolo particolare: quando una cascata le coinvolge si ha una fuoriuscita di almeno un granello dal sistema. Come vedremo questo è un fatto molto importante per il fenomeno che stiamo considerando. La fig. 2.1 rappresenta graficamente l'evoluzione di una frana.

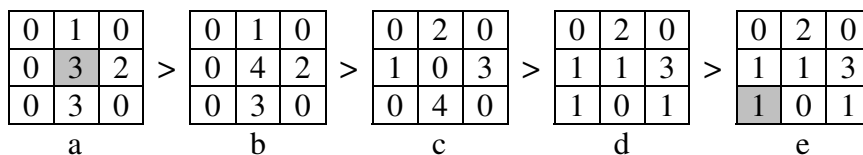


Fig. 2.1: Esempio di frana. (a) Al sito centrale viene aggiunto un granello di sabbia. (b) Poiché adesso ne ha 4, (c) crolla sulle posizioni adiacenti non diagonali. In particolare, nella posizione centrale in basso, adesso vi sono 4 granelli. Per questo, (d) anche tale sito crolla (e un granello esce dal bordo in basso). Poiché non vi sono altri crolli, (e) si procede ad aggiungere un granello di sabbia su un altro sito scelto a caso.

Questo semplice modello e le sue innumerevoli varianti, una volta a regime, originano comportamenti non banali, caratteristici di un sistema in uno stato critico: l'aggiunta di un granello può non avere effetto o può causare una frana che coinvolge l'intero sistema a seconda di dove il granello viene aggiunto e dello stato attuale (in questo caso, al posto di "stato" si può anche usare anche la parola "panorama"). Più precisamente si vede che le dimensioni e le durate di questi eventi vanno come leggi a potenza, proprio come per le transizioni di fase del secondo ordine.

Nel modello a pila di sabbia presentato sopra si può individuare un parametro che è in diretta relazione con la criticità del sistema: il numero medio di granelli presenti su un sito. Si dimostra che quando il parametro vale 2.1 granelli/sito il sistema è nello stato critico e le dimensioni delle frane vanno quindi come leggi a potenza. La particolarità di questo modello consiste nel fatto che il numero medio di granelli per sito a regime fluttua attorno al valore critico 2.1 indipendentemente dalle condizioni iniziali. Queste considerazioni rendono chiaro il nome "criticità auto-organizzata" assegnata a questo comportamento.

Ci possiamo chiedere come avviene questo cammino verso l'attrattore. M. Pakzusi e altri in [20] spiegano che i sistemi, a partire da stati lontani dall'equilibrio, diventano critici passando attraverso stati metastabili. I salti tra uno stato e l'altro sono compiuti proprio grazie alle valanghe. È sempre grazie alle valanghe che si formano le correlazioni a lungo raggio nel sistema.

Sempre in [20] gli autori dicono che il tempo che impiega un sistema ad auto-organizzarsi è inversamente proporzionale alle dimensioni del sistema stesso. Essi mostrano inoltre che, per alcuni modelli che esprimono criticità auto organizzata su un reticolo d-dimensionale composto da L siti, detta S la grandezza media delle valanghe, G la funzione analoga a quella che indica il numero di granelli per sito e f_c il valore critico di G, se

$$\langle S \rangle \sim (f_c - G)^{-\gamma} \quad (2.1)$$

con $\gamma > 1$, allora, indicata con s il numero della valanga, si ha:

$$(f_c - G(s)) \sim \left(\frac{s}{L^d} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.2)$$

Vediamo quindi che se la grandezza media delle valanghe diverge come una legge a potenza per la “temperatura” che tende al valore critico (cosa che in generale può essere valida per un intervallo di valori di G attorno a f_c), allora, col susseguirsi delle valanghe, G si avvicinerà a f_c con una legge a potenza.

Se γ vale 1, allora il rilassamento verso l’attrattore critico avviene esponenzialmente col numero delle valanghe.

In questo capitolo prenderemo spesso come esempio questo modello a pila di sabbia per la sua semplicità e per la familiarità che si acquista immediatamente con esso. Tuttavia ogni considerazione può essere trasferita (quasi) direttamente su un modello di rete neurale in cui al posto dei siti abbiamo le celle, al posto delle posizioni adiacenti abbiamo i collegamenti neurali ed al posto dell’altezza massima abbiamo la soglia di potenziale. Questi paragoni diverranno più chiari durante la lettura del terzo capitolo.

2.2 Processi di ramificazione

Il modello a pila di sabbia, nell’approssimazione in cui un sito può essere coinvolto in una singola cascata una sola volta, è equivalente ad un processo di ramificazione (*branching process*) [5][8]. Il primo studio di questa teoria, ad opera di Galton e Watson risale al 1875. Esso nacque con lo scopo di spiegare l’estinzione delle famiglie britanniche importanti.

Se indichiamo con $p(k)$ la probabilità che un padre generi k figli, si ha che il numero medio di figli per ogni padre, è:

$$\sigma = \sum_k k p(k) \quad (2.3)$$

Questo è il parametro cruciale per stabilire se una famiglia può sopravvivere o si estinguerà. Il parallelo con il modello a pila di sabbia è evidente: σ rappresenta il

numero medio di granelli che crollano per ogni granello che viene aggiunto.

Si dimostra che per $\sigma \leq 1$ la famiglia si estinguerà con certezza, mentre per $\sigma > 1$ c'è una probabilità maggiore di 0 che la generazione vada avanti indefinitamente. Se questo è il caso, la crescita sarà esponenziale. Nel caso critico, $\sigma = 1$, la teoria prevede ([5]) che la somma di tutti i discendenti segua una legge a potenza con esponente $\alpha = 1.5$. Con $\sigma < 1$ il processo è sotto-critico ed alla legge a potenza, presente con lo stesso esponente, si aggiunge un taglio esponenziale sempre più evidente man mano che σ si allontana dal valore critico.

Consideriamo ad esempio un *branching process* in cui in padre genera 2 figli con probabilità p e resta senza discendenza con probabilità $1-p$. La (2.1) ci dice che se vogliamo che il sistema sia critico, dobbiamo imporre p esattamente uguale a $1/2$. Questo è solo un esempio di un fatto più generale: un processo di ramificazione è critico solo per determinanti valori dei parametri, che devono essere impostati manualmente dall'esterno.

Come si concilia questo fatto con la SOC, la cui caratteristica fondamentale è proprio l'auto-regolazione verso il punto critico? Zapperi ed altri in [6] per risolvere questa apparente incongruenza proposero il concetto di processo di ramificazione auto organizzato (*Self organized branching process*, SOBP).

Per capire il funzionamento di un SOBP, consideriamo nuovamente il modello a pila di sabbia. Se il reticolo fosse richiuso su sé stesso (cioè se si avessero condizioni ai bordi chiuse), si avrebbe un andamento molto particolare: poiché che il numero massimo di granelli per sito sarebbe comunque 3 e poiché nessun granello potrebbe abbandonare il sistema, con l'aggiunta di sabbia si raggiungerebbe un momento in cui il numero di posizioni con 3 granelli sarebbe sufficiente per innescare una cascata infinita. Da questa considerazione si capisce che le condizioni al contorno sono molto importanti per la SOC. Come abbiamo visto, un reticolo con condizioni al contorno aperte fa sì che parte dei granelli dei siti posti al bordo possa uscire dal sistema. Questo permette l'instaurarsi di un feedback negativo che mantiene il sistema in prossimità della criticità. Infatti, aggiungendo sabbia si aumenta la densità dei siti critici (quelli con 3 granelli) e questo fatto aumenta la

probabilità che una valanga raggiunga i bordi. Quando questo avviene, la quantità di sabbia diminuisce e si ha una diminuzione della densità la densità dei siti critici.

Per ottenere la teoria SOBP è sufficiente tradurre tutto questo dal punto di vista dei processi di ramificazione. A tal proposito, consideriamo come in precedenza un *branching process* in cui il padre genera 2 figli con probabilità p . Come abbiamo visto, si ha criticità solo per $p=p_c=1/2$. Introduciamo ora condizioni al contorno aperte imponendo che una valanga duri al più n generazioni. Questo processo può essere facilmente visualizzato su un albero grande $N=2^{(n+1)}-1$. Se la generazioni realizzate sono meno di n , aumentiamo p in modo da favorire il raggiungimento della lunghezza massima stabilita. Al contrario, se arrivano alla lunghezza massima, diminuiamo p in modo da evitare uno andamento super-critico.

Detta $d(p,t)$ la dimensione della valanga che ha raggiunto l' n -esima generazione, possiamo riassumere tutto questo con la seguente equazione:

$$p(t+1) = p(t) + \frac{1-d(p,t)}{N} \quad (2.4)$$

Se p è fissata, il valore medio di $d(p,t)$ è $(2p)^n$. Sostituendo questo valore in (2.4), e considerando il limite continuo, si ha:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1-(2p)^n}{N} \quad (2.5)$$

la (2.5) ha un punto fisso stabile per $p=1/2$, che dimostra l'auto organizzazione verso la criticità di questo processo. L'equazione (2.5) è valida solo se la p non cambia da padre a figlio e rimane quindi costante all'interno di una sequenza. In un sistema che presenta SOC questo non è generalmente vero in quanto sono presenti correlazioni spaziali: nel modello a pila di sabbia, ad esempio, una frana può visitare più volte la stessa posizione e, quando questo avviene, la probabilità per il sito interessato di crollare dipende dalla storia dell'evento stesso. Per questo motivo un processo di tipo SOBP può essere mappato su modelli che esprimono criticità auto organizzata solo nel limite di sistemi a dimensionalità infinita (in cui una valanga non visita mai lo stesso sito).

2.3 Effetti di bordo

Nel paragrafo precedente abbiamo notato che le condizioni ai bordi sono molto importanti per la SOC. Inoltre, se un sistema opera nello stato sotto-critico, alla legge a potenza si aggiunge un taglio esponenziale. Ebbene, la presenza di questo taglio esponenziale non può essere presa come marcatore dello stato in cui opera il sistema in quanto esso può essere anche generato da altre cause, come gli effetti di bordo. In [2], infatti, C. W. Eurich e altri considerano un sistema di celle tutte interconnesse con legami di eguale intensità. Le celle hanno un parametro di energia interno ed una soglia oltre la quale rilasciano l'energia in eccesso al resto del sistema. Ad ogni passaggio, se non è in atto una cascata, viene scelta una cella a caso e ne viene aumentato il potenziale di una quantità fissata.

Gli autori risolvono analiticamente il sistema e trovano che la distribuzione delle valanghe dipende sia dall'intensità dei collegamenti, sia dalle dimensioni del sistema. Essi trovano che l'esponente della legge a potenza è costante e uguale a 1.5 solo nel limite di rete infinita.

Anche se i risultati qui esposti sono strettamente validi solo per questo particolare modello, è possibile che condizioni simili valgano per altri modelli di cui non è nota la soluzione analitica.

2.4 Dissipazione e SOC

Nei modelli considerati fino a questo punto non è presente dissipazione all'interno del sistema: i granelli di sabbia si conservano passando da una posizione all'altra. Negli anni si è sviluppata un'accesa discussione sulla possibilità di avere sistemi dissipativi che presentano un comportamento di tipo SOC. Articoli di scoperte e di confutazione si sono susseguiti. In un recente articolo al riguardo [7] gli autori sembrano indicare che tutti i sistemi SOC dissipativi presentati fino ad oggi non sono in realtà critici, oppure non sono veri e propri SOC in quanto richiedono una regolazione manuale di alcuni parametri. D'altro canto in [19] gli autori sembrano aver trovato un modello di rete neurale costituita da celle *integrate and fire* dissipative che mostra un comportamento di tipo SOC robusto. Il dibattito in ogni

caso resta ancora aperto...

Bisogna notare che i sistemi che operano al di sotto della criticità possono presentare ugualmente leggi di scala valide per diversi ordini di grandezza. Da questo fatto nascono molti errori nell'attribuire un comportamento di tipo SOC ad un sistema che in realtà non sta operando intorno ad un suo punto critico. Per definire questa tipologia e fare chiarezza gli autori di [7] introducono quella che chiamano quasi-criticità auto organizzata (*Self organized quasi-criticality*, SOqC).

2.5 Conseguenze della criticità

Molti studi eseguiti in vivo ed in vitro confermano che le reti neurali presenti nella corteccia operano attorno alla criticità. Si veda ad esempio [29] o [10]. Adottando un punto di vista Darwiniano ci possiamo chiedere quali vantaggi hanno ottenuto nella lotta alla sopravvivenza ed alla riproduzione gli individui che possedevano cervelli con questa caratteristica. Secondo alcuni la risposta sta nel fatto che è il mondo in cui viviamo che è critico ([11] e riferimenti al suo interno). L'esigenza di rispondere a piccoli segnali senza essere saturati da quelli sopra la media ha sicuramente contribuito ad indirizzare l'evoluzione in questa direzione. Altri vantaggi dell'operare in zona critica sono che essa fornisce la massima capacità di calcolo, trasmissione e memorizzazione delle informazioni ([12] e riferimenti al suo interno).

Visto che la teoria prevede un esponente di scala $\alpha=1.5$ per i processi di tipo SOBP, e vista l'importanza per il cervello di operare attorno ad uno stato critico, perché creare simulazioni di sistemi con α diverso?

Come abbiamo visto tale valore è esatto soltanto nell'approssimazione di campo medio (in cui un sito non viene visitato due volte dalla stessa valanga). Gli elementi dei sistemi reali possiedono generalmente correlazioni che possono portare ad una variazione di questo valore.

Oltre a ciò, un sistema complesso che globalmente presenta una certa legge a potenza può essere costituito da sottosistemi che hanno caratteristiche proprie.

Alcune patologie, come l'epilessia, possono essere scatenate da sottoreti del cervello che si comportano in modo anomalo.

Inoltre, vista l'universalità delle leggi a potenza in natura e nella società, trovare eventuali regolarità nell'interazione fra reti neurali che hanno α diversi potrebbe aiutare a comprendere fenomeni che avvengono in ambiti totalmente diversi, come l'economia o l'immigrazione.

L'autore non ha trovato in letteratura alcuna teoria che riguardi la risposta di sistemi SOC a perturbazioni esterne: gli articoli in questo ambito generalmente si limitano a dimostrare o confutare la criticità di alcuni sistemi. Per questo motivo alcuni risultati presentati in seguito non saranno supportati da basi teoriche: lo scopo del proporli è quello di agevolare eventuali studi futuri.

Capitolo 3

Reti neuronali e loro simulazione

3.1 Reti neurali

Le “*reti neurali*” sono modelli costruiti con lo scopo di simulare il funzionamento delle reti di neuroni reali, o “*reti neuronali*”. Per fornire un inquadramento temporale, possiamo dire che il primo passo verso lo sviluppo di questo tipo di rete fu fatto nel 1943 grazie a McCulloch e Pitts [40], i quali schematizzano il primo neurone artificiale.

Vediamo adesso, in breve, quali aspetti del funzionamento del cervello vengono generalmente simulati. Questo organo è costituito da cellule particolari, i neuroni. Uno di essi è schematizzato nella figura seguente:

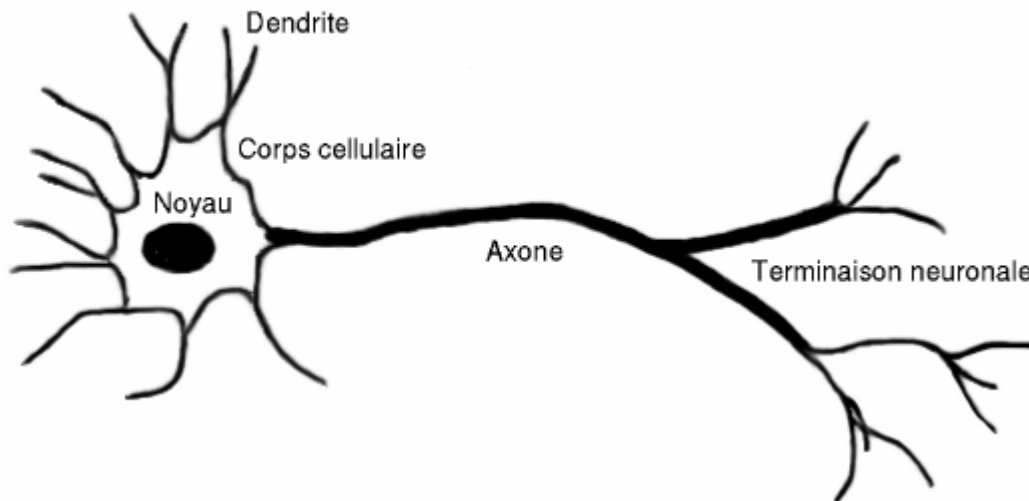


Fig. 3.1: Rappresentazione schematica di un neurone (fonte: Wikipedia). I dendriti nella parte sinistra della figura ricevono gli stimoli. Quando la somma dei segnali in ingresso supera una certa soglia, un segnale elettrico percorre l'assone fino alle terminazioni, dove vengono rilasciati i neurotrasmettitori.

come vediamo, un neurone può essere suddiviso in tre parti: le terminazioni in ingresso (i dendriti), il corpo cellulare ed un canale di uscita (l'assone) con le proprie ramificazioni. Ad un livello base, il funzionamento è abbastanza semplice: i segnali elettrici provenienti dai dendriti vengono integrati e trasferiti all'assone secondo una certa funzione caratteristica di tipo sigmoideo. L'assone, nella parte terminale, rilascia alcune sostanze chimiche, i neurotrasmettitori, che possono avere un effetto eccitante od inibente sui dendriti appartenenti ad altre cellule. A questo punto il processo riprende dall'inizio.

Nonostante lo schema di base sia comune a tutti i neuroni, in realtà essi possono essere molto diversi l'uno dall'altro sia nell'aspetto, sia nelle modalità funzionamento. Tali dettagli vanno ben oltre lo scopo di questa tesi; un'ottima base di partenza per eventuali approfondimenti è [38]. Circa 100 miliardi di neuroni, organizzati in reti, formano un tipico cervello umano.

Una cellula neurale (corrispettivo virtuale del neurone) esegue una somma pesata dei segnali in ingresso e fornisce come uscita una funzione di questa somma. La figura seguente ne schematizza il funzionamento:

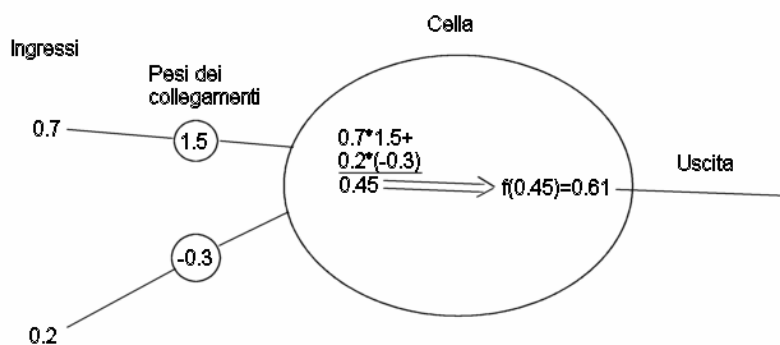


Fig. 2.1: Schema di funzionamento di una cella neurale. Essa esegue una somma pesata degli ingressi secondo i pesi dei collegamenti; in seguito applica una funzione (generalmente a "scalino stonato") al risultato della somma per fornire l'uscita.

Modificando i pesi e/o la disposizione dei collegamenti è possibile istruire una

rete neurale in modo da farle assolvere alcuni compiti specifici. Questa operazione mima l'apprendimento che avviene nel cervello. Gli albori delle reti neurali artificiali furono costellati da incoraggianti successi: le reti mostravano, in determinati test, la capacità di generalizzare, cioè di fornire la risposta corretta su un numero di esempi più grande di quello su cui erano state istruite. Le speranze iniziali non ebbero seguito immediato: lo studio di questi modelli fu abbandonato per molto tempo in quanto gli algoritmi di apprendimento potevano essere applicati solo a reti molto semplici ed era stato dimostrato che, data una struttura così semplice, esse non potevano apprendere alcune funzioni base, come lo xor. Per quanto riguarda questo caso in particolare, fu dimostrato che le reti erano in grado di classificare lo spazio bidimensionale dei valori in ingresso dividendolo in due con una retta. A tutti i punti di un semipiano esse associavano una uscita "bassa" (la somma pesata dei valori era al di sotto della soglia), mentre ne associavano una "alta" agli altri. Geometricamente si vede che questa capacità di classificazione non è sufficiente per fornire risposte corrette nel caso dello xor.

Il settore ebbe nuova vita grazie alla scoperta dell'algoritmo a retropropagazione dell'errore, che fornisce un modo per addestrare reti più complesse (e capaci di separare lo spazio dei valori in ingresso in maniera meno banale). Inoltre, con l'avvento di computer sempre più potenti e capaci di calcolo parallelo è divenuto possibile effettuare simulazioni sempre più accurate del funzionamento stesso del cervello.

Al giorno d'oggi, quindi, si costruiscono reti neurali sia per l'utilità pratica di avere un software in grado di gestire situazioni altrimenti difficilmente modellabili (tipo guida automatica, riconoscimento dei caratteri o riconoscimento vocale) sia come aiuto per la ricerca verso una più profonda comprensione del funzionamento del cervello.

Bisogna notare che nel primo caso non si cerca una perfetta somiglianza tra la rete virtuale ed una reale e la prova di questo fatto è che generalmente l'algoritmo di apprendimento è costruito a tavolino su basi matematiche ed ha ben poco in comune con quanto avviene nelle reti di neuroni.

Per quanto riguarda il secondo caso, invece, si ha generalmente una ricerca della miglior aderenza possibile alla realtà. Tuttavia, in genere, più i modelli sono realistici e più sono onerosi da un punto di vista computazionale. Questo spinge generalmente a cercare un compromesso tra aderenza alla realtà e dimensioni del sistema simulato.

3.2 Cascate neuronali

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, l'uscita di una cellula neurale è funzione della somma pesata dei valori in ingresso. La forma di questa funzione nei neuroni da noi considerati è sigmoideale. Quando la somma pesata è tale che la funzione assume valori nella parte alta dello scalino, si dice che il neurone si attiva. Studi sull'attività di gruppi di neuroni in vivo ed in vitro hanno rivelato l'esistenza delle cosiddette cascate neuronali. Una cascata consiste nell'attivazione in successione di neuroni tra loro collegati. Quando una cellula si attiva, influenza il potenziale dei neuroni ad essa collegati in uscita; se qualcuno di questi supera la propria soglia a seguito dello stimolo, si attiva a sua volta e cambia il potenziale delle celle ad esso collegate. Il termine “cascata” riassume bene questo comportamento.

Una particolarità delle cascate neuronali consiste nel fatto che i tempi di attesa tra una e l'altra hanno un andamento a potenza inversa; stessa cosa vale per le dimensioni delle cascate, cioè per il numero di neuroni da essa coinvolti. Come abbiamo visto, questo è un indice di una dinamica complessa sottostante. Nei capitoli seguenti costruiremo reti neurali ed analizzeremo le cascate risultanti dalla simulazione nell'ottica NPR e SOC.

I risultati teorici circa il complexity matching che abbiamo visto precedentemente, se venissero confermati dalla sperimentazione, potrebbero indicare una strada di ricerca per la cura o l'alleviamento di alcune patologie, come l'epilessia, caratterizzate da una riduzione della complessità delle cascate neuronali. Infatti, in linea teorica, è possibile evitare una crisi impedendo che ciò avvenga. A tale scopo potrebbe essere sufficiente stimolare il paziente con particolari suoni o immagini in

grado di mantenere basso il μ delle sue cascate neuronali facendo ereditare al cervello le proprietà di scala dello stimolo. Nei capitoli seguenti vedremo alcuni risultati preliminari in tale direzione.

3.3 Il modello

Uno degli obiettivi di questa tesi è di simulare l'interazione tra due reti neuronali aventi indici di complessità (μ , relativo agli intervalli tra le cascate, vedi cap. 1) o esponenti di scala (α , relativo alla dimensione delle cascate, vedi cap. 2) differenti. Per fare questo è necessario disporre di un modello di rete neurale che permetta di variare queste quantità. Gran parte del lavoro è costituito nel replicare diversi modelli presenti in letteratura per vedere se era possibile cambiarne il μ o l' α modificandone i parametri. Questa operazione è risultata più complessa di quanto possa sembrare a prima vista, in quanto i modelli che si trovano in letteratura funzionano bene solo nell'intorno di valori specifici. Il modello finale da me utilizzato prende spunto da diverse fonti, in particolare da [2] e [12], ma, per quanto in mia conoscenza, esso è unico in letteratura.

Il principio di funzionamento generale non si discosta molto da quanto esposto nei primi paragrafi di questo capitolo, però cambiano alcuni dettagli che adesso analizzeremo.

Per ogni cella è possibile specificare una soglia, il numero di collegamenti in uscita, la durata del periodo refrattario, un parametro di “efficacia” e se è eccitante o inibente. Vediamo queste caratteristiche in maggiore dettaglio.

Una prima differenza col modello iniziale consiste nel fatto che non viene utilizzata una funzione a sigmoide per il trasferimento del potenziale dai dendriti all'assone. Al suo posto c'è una funzione a soglia. Questo fatto, oltre ad alleggerire l'algoritmo della simulazione, permette la definizione chiara di una quantità molto importante: il potenziale della cella. Ogni volta che si esegue una somma pesata, il potenziale viene aumentato della quantità calcolata e, se supera la soglia, la cella si attiva. Questo comportamento esplicita il parallelo col modello a pila di sabbia

descritto nel capitolo precedente.

Una caratteristica presente nelle simulazioni effettuate e nella realtà a cui non è stato ancora fatto cenno è che una percentuale di celle delle reti emette neurotrasmettitori che inibiscono l'attività dei dendriti delle celle collegate. Esse svolgono un importante ruolo regolatore. Per questo motivo nel modello è possibile specificare se una cella è eccitante o inibente.

Il periodo refrattario serve per mimare il fatto che un neurone non accetta stimoli per un certo lasso temporale a partire dal momento in cui si attiva.

Il parametro di efficacia serve per introdurre (un po' grossolanamente) nel modello tutti quei fattori che possono alterare il trasferimento del potenziale, come eventuali perdite.

L'algoritmo di creazione delle reti consente l'esistenza, dettata dal caso, di celle che non hanno collegamenti in ingresso in quanto viene specificato solo un numero minimo ed uno massimo di collegamenti in uscita. Queste celle sono tuttavia parte attiva della rete, grazie al meccanismo di incremento del potenziale, come vedremo tra poco.

Il potenziale trasferito da una cella ad un'altra è proporzionale all'intensità dell'impulso ed al neurotrasmettitore disponibile. Ogni collegamento possiede infatti una quantità massima di neurotrasmettitore. Ogni volta che si attiva, la quantità di neurotrasmettitore effettivamente disponibile diminuisce; nei periodi di inattività essa si ricarica secondo una costante di tempo che può essere scelta a seconda delle necessità. Il neurotrasmettitore emesso si dissipa come la scarica di un condensatore la cui costante di tempo è impostabile.

Nei sistemi reali si osserva il firing spontaneo di neuroni. Per simulare questo aspetto, ad ogni passo temporale viene scelta casualmente una cella ed il suo potenziale viene aumentato di una piccola quantità. Come accennato in precedenza, questo meccanismo permette di avere un ruolo attivo anche alle eventuali celle che non hanno collegamenti in ingresso. Col procedere del tempo simulato, si arriverà ad un punto in cui il potenziale di una cella supera la soglia di attivazione; questo fatto

potrà generare una cascata, come abbiamo visto in precedenza. Durante le cascate l'aumento del potenziale di celle scelte a caso viene sospeso. Con questa modalità di funzionamento ed una opportuna scelta dei parametri, si osservano cascate neuronali le cui dimensioni vanno come leggi a potenza.

Il modello fin qui descritto è stato utilizzato esclusivamente per studiare i risultati inerenti gli esponenti di scala spaziali in quanto i tempi di attesa tra le cascate da esso simulate seguono leggi esponenziali invece che a potenza.

A seguito di numerose prove sono state individuate due strade per ovviare a questo problema.

La prima, più elegante, consiste nel far sì che il valore con cui viene aumentato il potenziale della cella scelta a caso ad ogni incremento temporale coincida con quelli assunti da una mappa di Manneville il cui valore di partenza viene impostato casualmente dopo ogni cascata. Varie simulazioni hanno dimostrato che questa soluzione, non riscontrata in letteratura, permette di ottenere μ compresi tra 1.7 e 2.3 se inserita nel modello sopra esposto. Il fatto che questa modifica generi leggi a potenza per quanto riguarda i tempi può non sorprendere: la mappa di Manneville è nota per avere questo comportamento. Comunque, a priori, non è scontato che questa caratteristica permanga nel caso in esame: il raggiungimento della soglia avviene all'interno delle celle ed è determinato dalla somma del valore del potenziale (che è il risultato della storia precedente del sistema) e dal valore attuale della mappa. Inoltre, fatto anch'esso non scontato a priori, la legge a potenza per le dimensioni delle cascate è molto robusta rispetto a questa modifica.

La seconda strada individuata per ottenere leggi a potenza sui tempi è quella di predeterminare il momento in cui deve partire una cascata e agire di conseguenza, inserendo una pausa opportuna se l'attivazione naturale dettata dal modello dovesse avvenire in anticipo o aumentando opportunamente il potenziale di una cella in caso di ritardo. In questo modo è possibile ottenere qualsiasi μ si desideri. La legge a potenza per le dimensioni delle cascate è risultata robusta anche in questo caso.

La seconda strada, più della prima, è una evidente forzatura in quanto le leggi a

potenza non emergono dal modello, ma sono impostate a tavolino, a priori. Ciononostante bisogna ricordare che la teoria dei processi di rinnovo non poissoniani è fenomenologica e considera l'esistenza e la distribuzione temporale degli eventi come un dato di fatto. In altre parole essa è indipendente dal meccanismo che li origina. Per questo motivo sue conclusioni possono essere verificate con il modello utilizzato.

A fronte di queste considerazioni è stato scelto di utilizzare la seconda modalità in quanto, permettendo di ottenere cascate con μ a piacere, consente di testare il fenomeno del complexity matching su intervalli più grandi.

3.4 Alcuni dettagli sull'implementazione

Il programma di simulazione è stato scritto interamente dal sottoscritto in linguaggio c++. Visto che i moderni processori hanno al loro interno più unità di elaborazione che funzionano in parallelo (chiamate core), ho cercato di sfruttare questa opportunità per velocizzare i tempi di calcolo.

Uno scheduler determina quali celle dovranno essere elaborate al tempo corrente. Le unità di calcolo, lavorando in parallelo, si occupano di svolgere le operazioni di incremento del potenziale e di attivazione. Esse si occupano anche di informare lo scheduler sul momento in cui le celle dovranno essere elaborate nuovamente. Mentre le unità sopra descritte eseguono la simulazione, vengono raccolti i dati sulle dimensioni e i tempi delle cascate, sul numero di celle che vengono attivate ad ogni istante e sulla somma di tutti i potenziali della rete. Al termine delle simulazioni entra in gioco un altro programma che, sfruttando anch'esso il calcolo parallelo, si occupa di elaborare i dati grezzi raccolti per fornire i dati finali da analizzare e graficare.

Poiché il linguaggio utilizzato permette esclusivamente l'estrazione di numeri (pseudo)casuali con distribuzione uniforme, è stato necessario utilizzare il metodo dell'inversione (o trasformata integrale della probabilità) per ottenere una legge a potenza. Inoltre, per evitare eventuali problemi dovuti alla limitatezza dell'insieme di

numeri casuali generabili dalla funzione base, è stato utilizzato un metodo che ne amplia notevolmente la dimensione, mantenendo l'uniformità della distribuzione.

Capitolo 4

Risultati relativi alla teoria NPR

4.1 Esponenti di scala

Utilizzando il software da me realizzato ho creato 18 reti con μ variabile tra 1.1 e 2.8. Ogni rete è costituita da 30 unità, il 26 percento delle quali è inibitorio. Quest'ultimo valore è stato scelto secondo le indicazioni di alcuni modelli presenti in letteratura. I parametri sono tali da creare cascate con esponente di scala α pari a 1.9 ± 0.1 per tutte le reti, indipendentemente dal μ impostato. Per evitare che alcune distorsioni nel grafico della distribuzione delle dimensioni delle cascate fossero eccessive, è stato necessario regolare il valore della soglia delle celle.

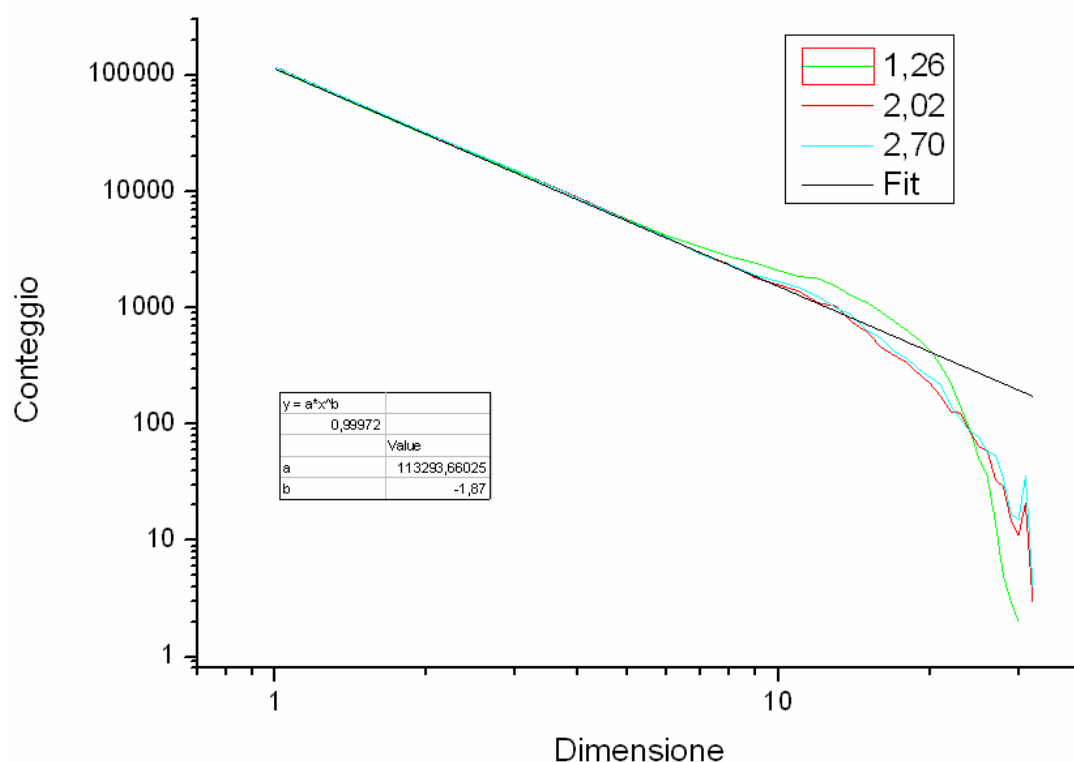


Fig. 4.1: Conteggio delle cascate in funzione della loro dimensione per tre diversi valori di μ .

La figura 4.1 mostra il numero di cascate in funzione delle loro dimensioni per

tre simulazioni di 200000 eventi ciascuna.

Dal grafico notiamo che i risultati delle simulazioni sono sovrapponibili per dimensioni basse delle cascate, mentre vi sono deviazioni per valori più grandi. L'evidente taglio esponenziale verrà discusso nel paragrafo 5.1.

Come abbiamo notato nel capitolo iniziale, in un sistema esteso può accadere che gli eventi di rinnovo ne coinvolgano solo una parte. Questo è esattamente ciò che accade nel nostro caso, come viene mostrato chiaramente dalla figura 4.1. Notiamo comunque la presenza di valanghe che coinvolgono tutto il sistema, anche se, a causa del taglio esponenziale, il loro numero è al di sotto di quanto ci si attenderebbe se le loro dimensioni seguissero perfettamente una legge a potenza.

Le figure 4.2 (a) e (b) mostrano la distribuzione degli intervalli di attesa tra le cascate per $\mu=1.26$ e $\mu=2.70$ rispettivamente. Poiché tali valori sono impostati manualmente, non stupisce la loro aderenza a leggi a potenza. L'unità di misura dei tempi simulata (u.t.s.) è diretta conseguenza del modello: ad ogni u.t.s. viene aumentato il potenziale di una cella scelta a caso.

In entrambe le figure è presente una deviazione dal fit per valori bassi degli intervalli. Ciò è dovuto al fatto che, in una certa percentuale di occasioni, le cellule incaricate di avviare una valanga erano impossibilitate a farlo nei tempi stabiliti perché si trovavano ancora nel loro periodo refrattario. In ogni caso queste deviazioni non inficiano i risultati.

4.2 Andamento e varianza

Per verificare le predizioni della teoria NPR è necessario avere un segnale su cui effettuare le verifiche. Nel nostro caso gli eventi di rinnovo sono le cascate neuronali, che modificano i potenziali delle cellule simulate. Appare naturale quindi utilizzare come segnale la somma dei potenziali di tutte le cellule del sistema.

Nel primo capitolo sono state evidenziate le differenze tra il caso ergodico e quello non ergodico. Tali differenze sono ben visibili anche con un confronto qualitativo tra i segnali risultanti nelle due situazioni, come evidenziano le figure 4.3.

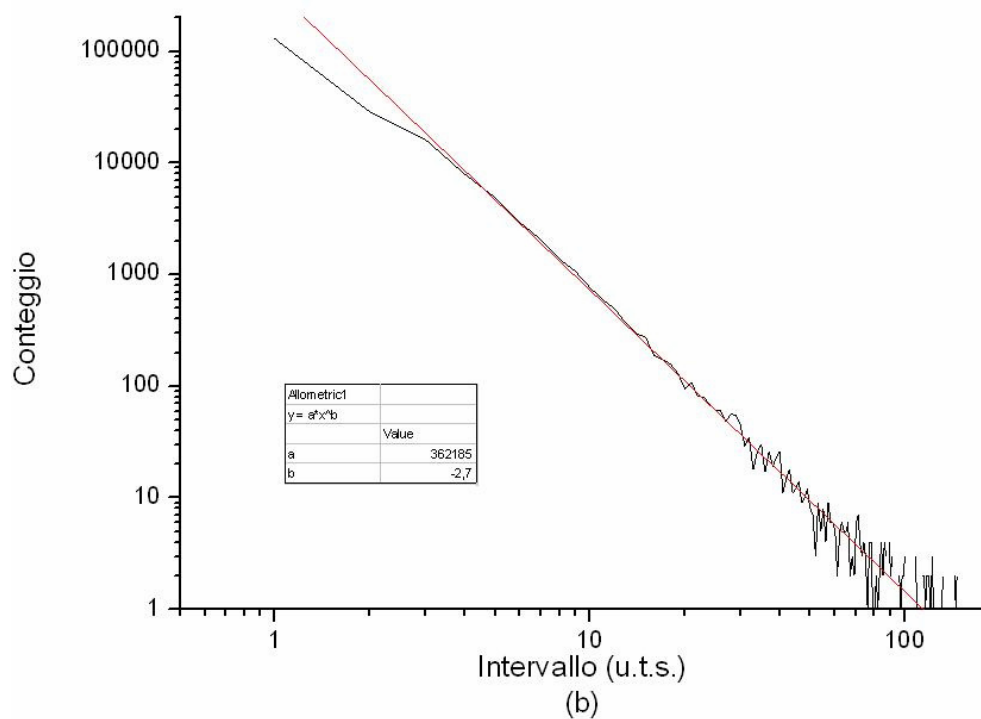
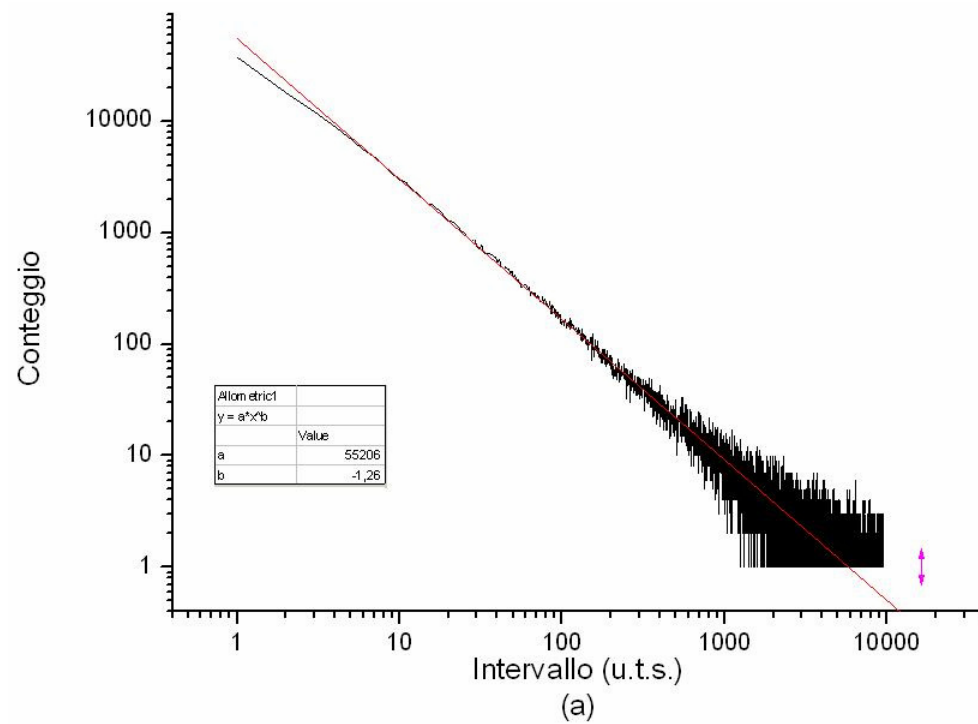


Fig. 4.2: Distribuzione degli intervalli di attesa tra le cascate (a) $\mu=1.26$ e (b) $\mu=2.70$. In rosso il fit. “u.t.s.” sta per unita di tempo simulate. Da notare la differenza nei valori delle ascisse e delle ordinate tra le due figure.

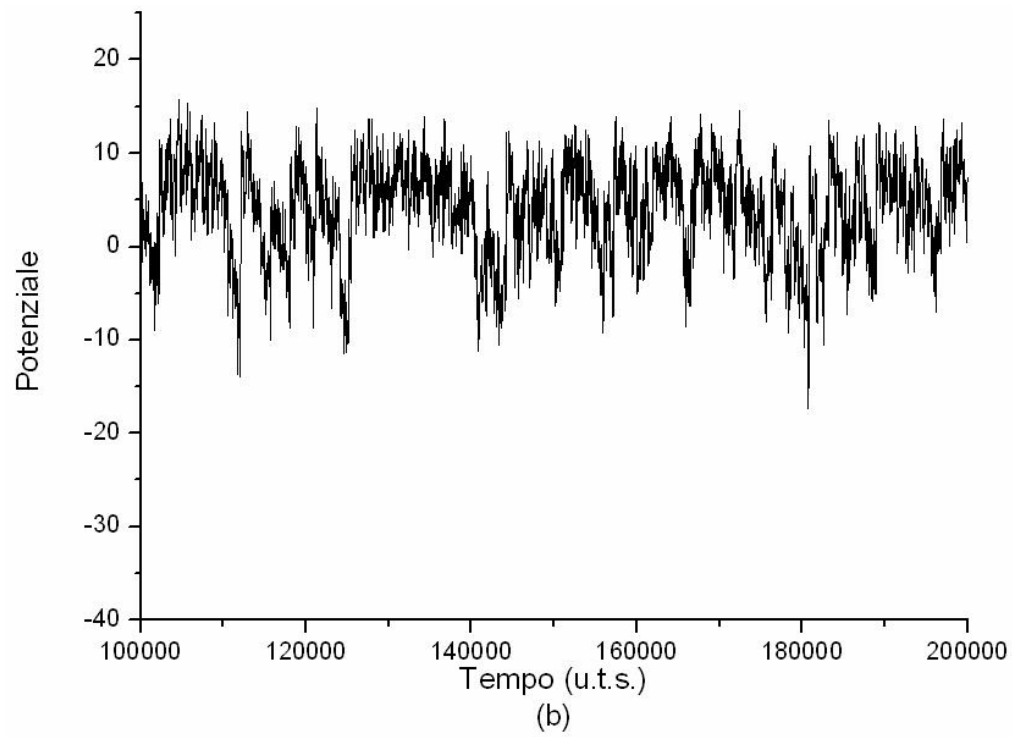
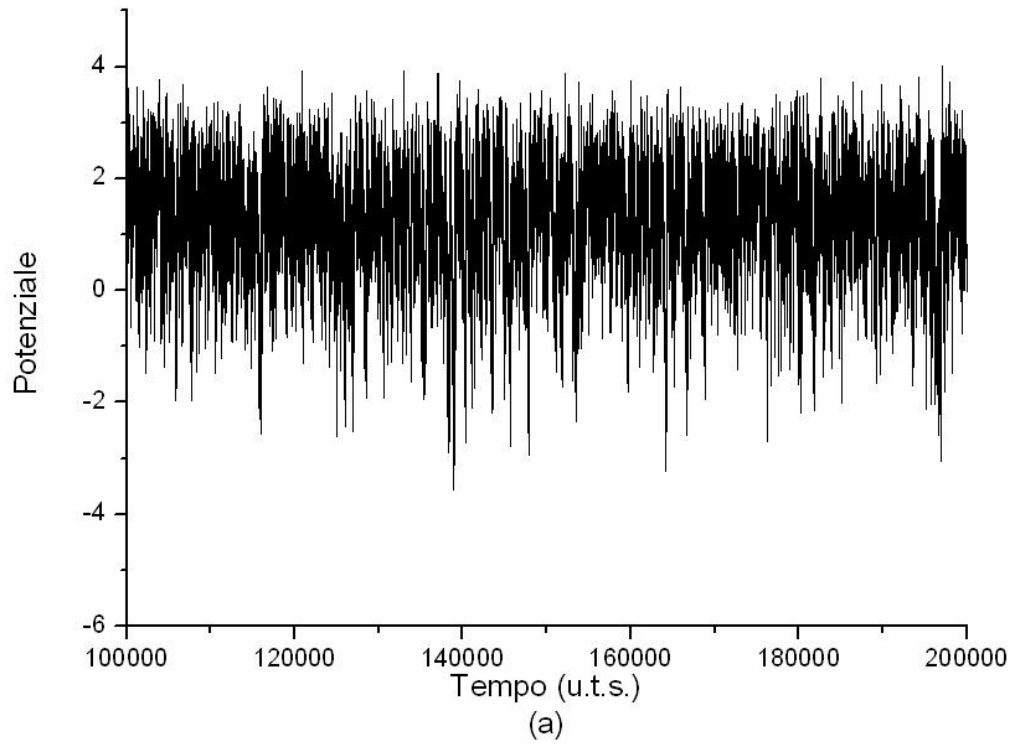


Fig. 4.3: (a) Andamento del potenziale totale in regime ergodico ($\mu=2.70$) e (b) in regime non ergodico ($\mu=1.26$).

Iniziamo adesso a quantificare tali differenze. Nel capitolo introduttivo avevamo notato che la deviazione standard, σ , diverge per $\mu < 3$. Nel nostro caso stiamo analizzando un sistema finito, simulato per un tempo finito. E' chiaro che, in queste circostanze, anche la σ assumerà valori finiti. Tuttavia, i valori calcolati dovrebbero essere tanto più grandi quanto più μ è piccolo.

Per confrontare tra loro le σ calcolate per reti diverse, è stato necessario dividerle per il valore medio dei rispettivi segnali, in quanto quest'ultimo varia al variare di μ .

La figura 4.4 mostra che le previsioni sono rispettate dalle reti in esame: più ci si sposta verso μ alti (più il regime è ergodico), più le fluttuazioni diminuiscono.

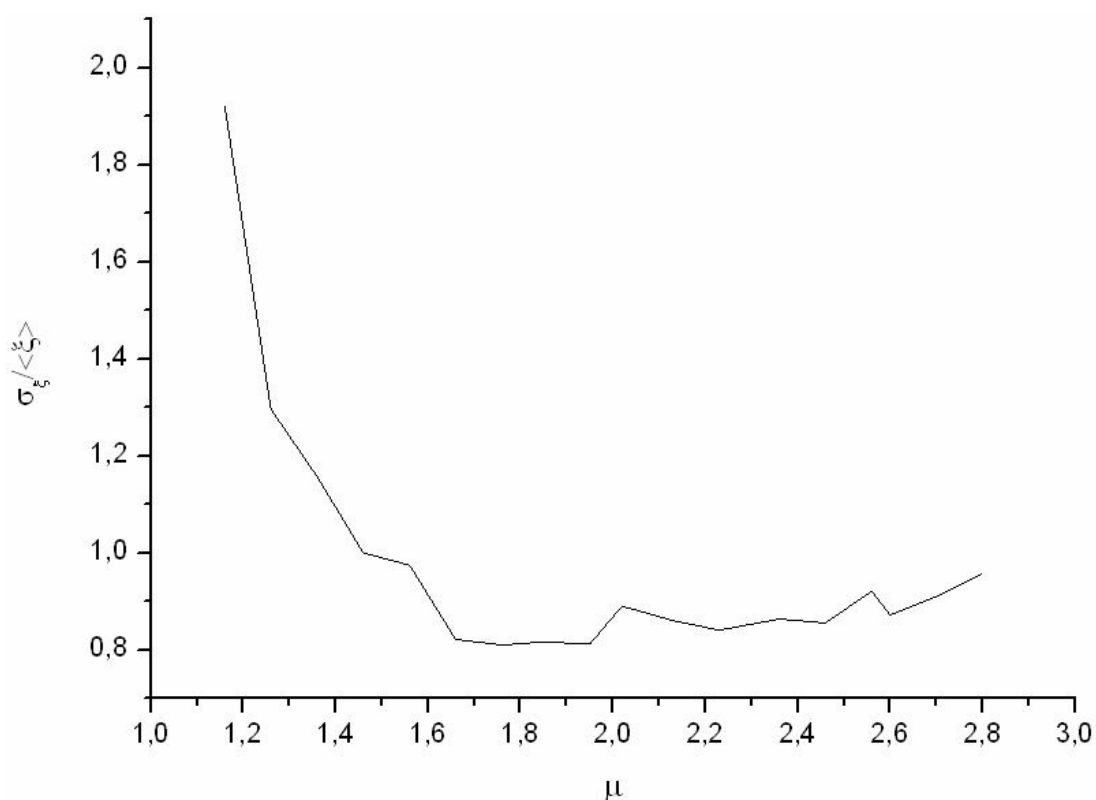


Fig. 4.4: Deviazione standard del segnale normalizzata col valore medio in funzione di μ . Più ci si allontana dall'ergodicità e più le fluttuazioni aumentano

La leggera risalita del grafico per alti valori di μ può essere causata dal fatto che il metodo utilizzato per riportare le σ sulla stessa scala perde di validità quando la media del segnale si avvicina a 0: in questo caso si ha una divergenza in quanto le

fluttuazioni non tendono a 0.

Per verificare questa ipotesi la figura 4.5 mostra la media del segnale (il potenziale totale del sistema mediato sulla durata di una simulazione) in funzione di μ . Una conferma dell'ipotesi viene dalla evidente anticorrelazione che si ha tra i grafici per $\mu > 2.4$

La fig. 4.5 mostra anche un'altra cosa molto interessante: la transizione tra regime non ergodico ed ergodico, che avviene passando da $\mu < 2$ a $\mu > 2$, provoca un calo netto di $\langle \xi(t) \rangle$. Visto che il numero di celle è lo stesso per ogni simulazione, tale diminuzione è presente anche sul grafico del potenziale medio per cella. Quest'ultimo dato può essere considerato un parametro critico per la transizione tra ergodico e non ergodico.

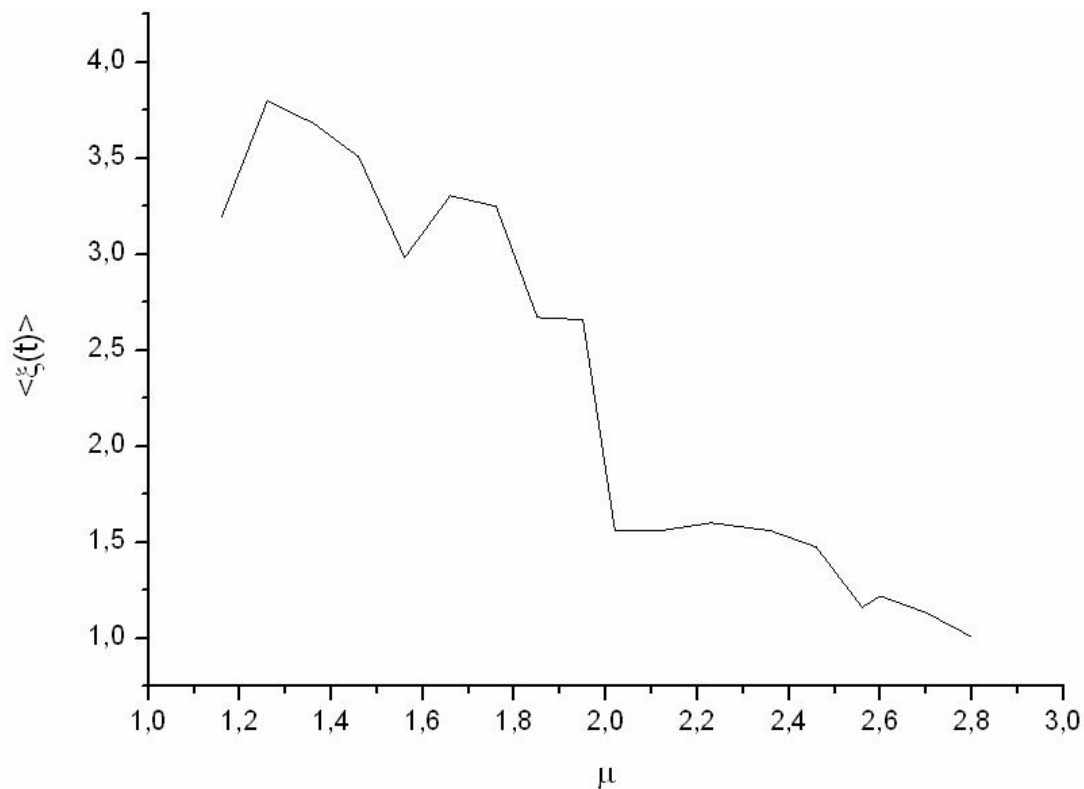


Fig. 4.5: Media del segnale in funzione di μ . Il passaggio dal regime non ergodico ($\mu < 2$) a quello ergodico ($\mu > 2$) provoca un brusco salto in $\langle \xi(t) \rangle$

4.3 Funzioni di autocorrelazione

Nel primo capitolo abbiamo visto che un sistema dominato da eventi possiede una forte correlazione nelle zone laminari e che gli eventi di rinnovo sono responsabili della distruzione di questa correlazione.

L'autocorrelazione di un sistema non ergodico dovrebbe quindi decadere più lentamente di quella di un sistema ergodico perché il primo possiede zone laminari più grandi. Questa è una conseguenza della definizione di $\psi(t)$ data in (1.4).

Le figure 4.6 confermano queste previsioni: le correlazioni evidenziate nella seconda figura sono molto più lunghe.

Un altro risultato della teoria dei processi di rinnovo non poissoniani che possiamo esaminare è l'invecchiamento delle distribuzioni: se nel caso ergodico il sistema raggiunge una distribuzione invecchiata nel limite di tempi lunghi, ciò non vale per il caso non ergodico, in cui è presente il fenomeno del *perennial aging*.

Una conseguenza diretta di questo fatto si ha proprio sulle funzioni di autocorrelazione. Consideriamo un sistema non ergodico. In questo caso, due grafici di autocorrelazione, costruiti basandosi su parti diverse dello stesso segnale, possono risultare parecchio diversi perché la distribuzione cambia continuamente. Ciò non può avvenire se il sistema è ergodico perché, nel limite di tempi lunghi, la distribuzione non cambia.

I grafici 4.7 mostrano tre funzioni di autocorrelazione provenienti da tre parti diverse dello stesso segnale. La 4.7 (a) è basata su un sistema ergodico e la 4.7 (b) su un sistema non ergodico. Le previsioni teoriche sono confermate anche in questo caso.

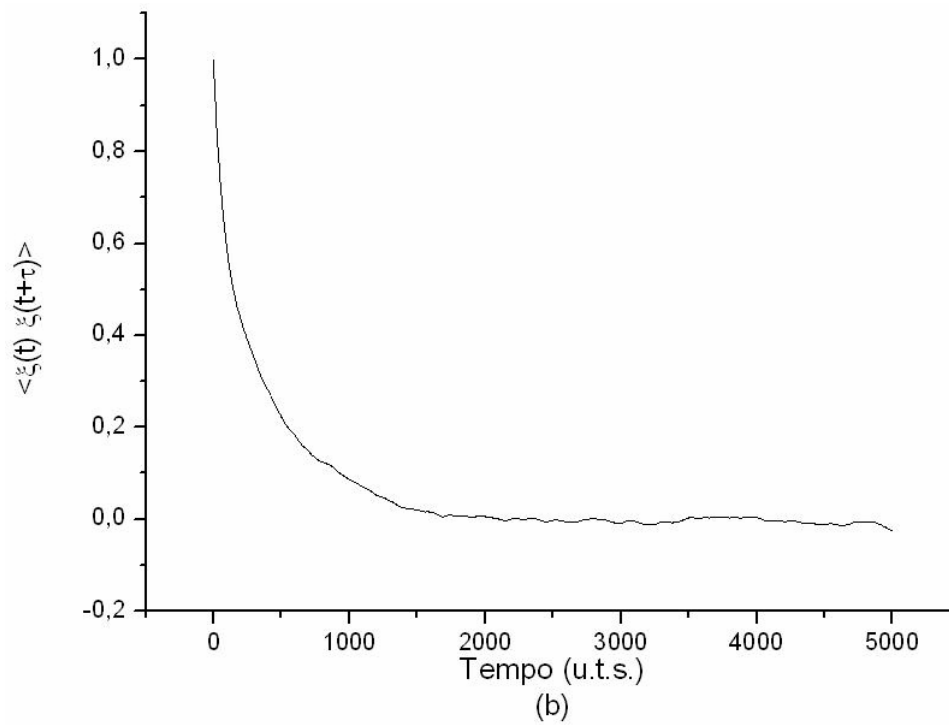
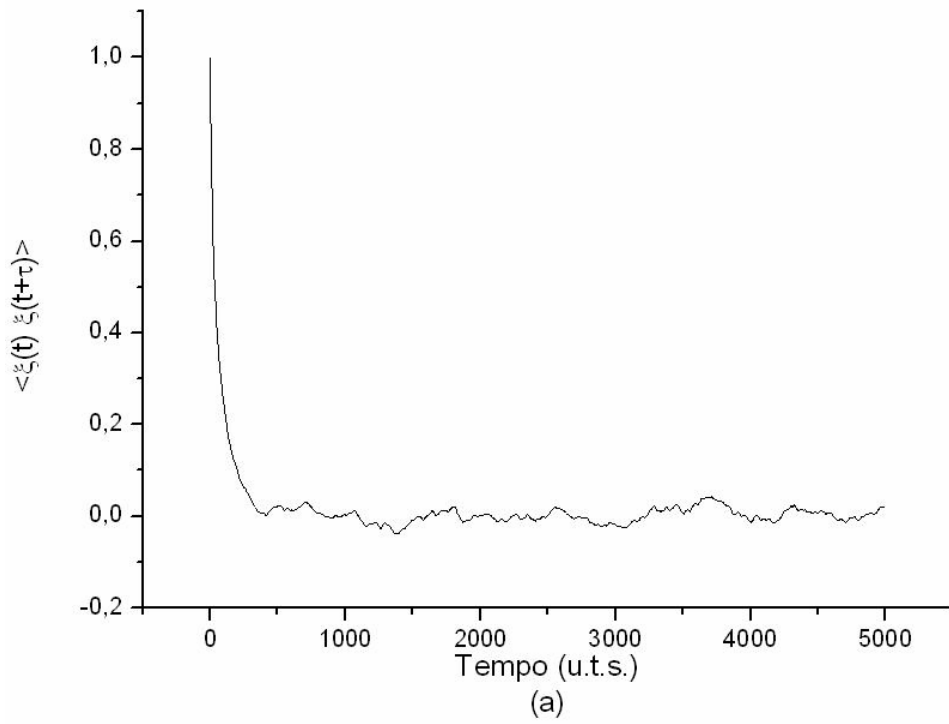


Fig. 4.6: (a) Funzione di autocorrelazione del sistema nel caso ergodico ($\mu=2.56$) (b) Funzione di autocorrelazione nel caso non ergodico ($\mu=1.46$) La funzione decade più lentamente in (b), come previsto dalla teoria.

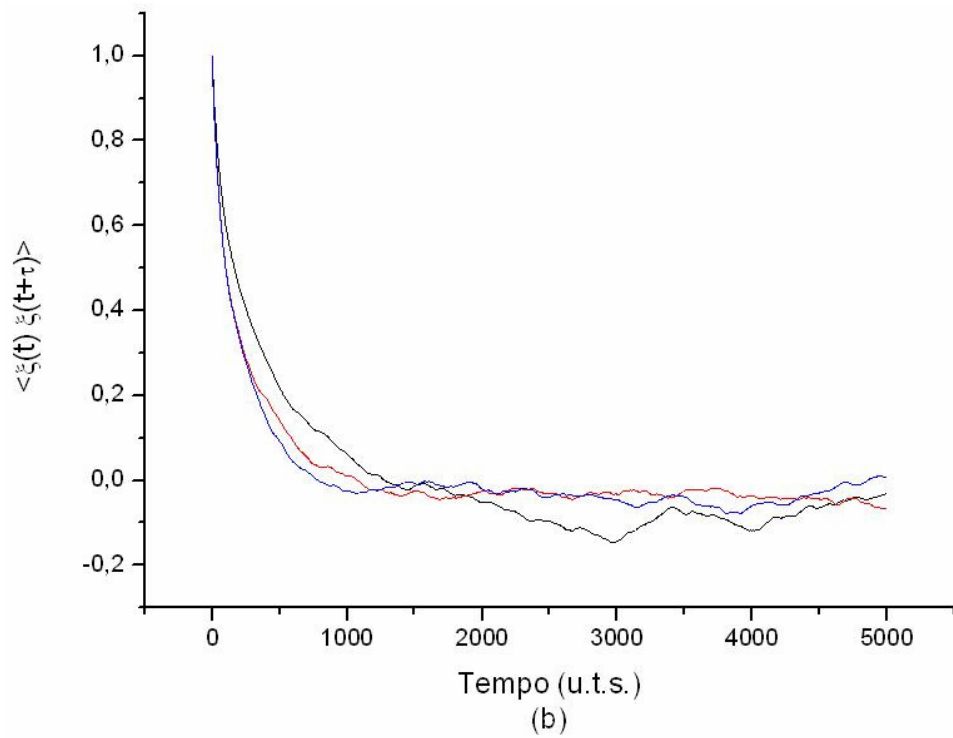
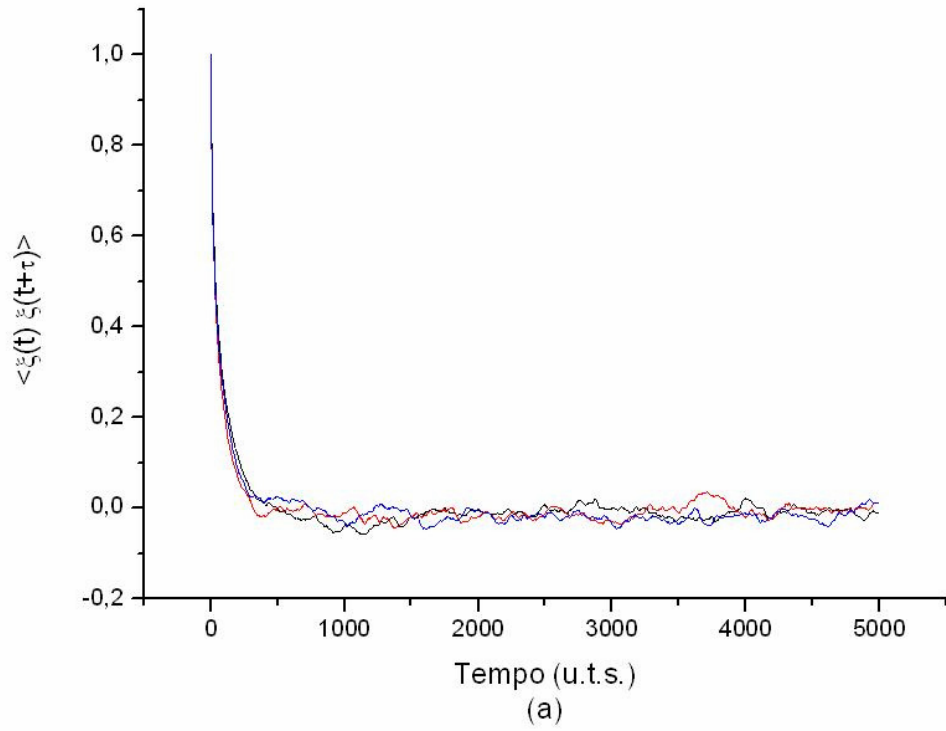


Fig. 4.7: Funzioni di autocorrelazione provenienti da tre parti diverse dello stesso segnale (a) nel caso ergodico ($\mu=2.56$) e (b) nel caso non ergodico ($\mu=1.46$). Le conseguenze del perennial aging sono evidenti.

4.4 Spettro di potenza

Lo spettro di potenza è uno dei metodi di analisi più noti. Molti sistemi presentano fluttuazioni che vanno come una potenza inversa di esponente η , che solitamente assume valori tra 0.5 e 1.5. I motivi alla base di questo comportamento non sono ancora stati compresi del tutto e la letteratura al riguardo è molto ampia (vedi, ad esempio, [22] e [23]).

Per i sistemi complessi, η varia in un intervallo più ampio e permette di caratterizzare quantitativamente le proprietà del sistema. Per NPR dicotomici si ha [24]:

$$\eta = 3 - \mu \quad (4.1)$$

Con $\mu < 3$, quindi, lo spettro è una legge a potenza, mentre è bianco per $\mu > 3$. Inoltre, al passaggio tra regime ergodico e non ergodico ($\mu = 2$), si ha che lo spettro ha proprio l'andamento $1/f$.

Lo spettro di potenza della somma di segnali qualunque, fra loro indipendenti, è la somma degli spettri dei singoli segnali. Per questo motivo, se sommiamo gli spettri di tanti processi di rinnovo dicotomici aventi lo stesso μ , otteniamo uno spettro che va ancora come una potenza inversa, con η dato sempre dalla (4.1).

Le fig. 4.8 riportano i grafici ottenuti da segnali in regime ergodico (a) e non ergodico (b).

Nel caso ergodico, un fit alle basse frequenze indica $\eta = 0.4 \pm 0.2$. Tale valore conferma la (4.1) in quanto il μ del sistema da cui è tratto lo spettro è 2.56. Gli errori sono stati valutati utilizzando intervalli diversi per i fit e vedendo come variava il miglior η . Andando ad analizzare il caso non ergodico troviamo $\eta = 0.7 \pm 0.2$. Il fatto che tale valore sia superiore al caso precedente fornisce soltanto una conferma qualitativa della (4.1): η dovrebbe valere circa 1.5 in questo caso. La discrepanza è dovuta, con ogni probabilità, al fatto che le condizioni di validità della formula non sono verificate in questo caso in particolare: le correlazioni tra i potenziali dei neuroni fanno sì che il segnale totale non sia somma di segnali indipendenti.

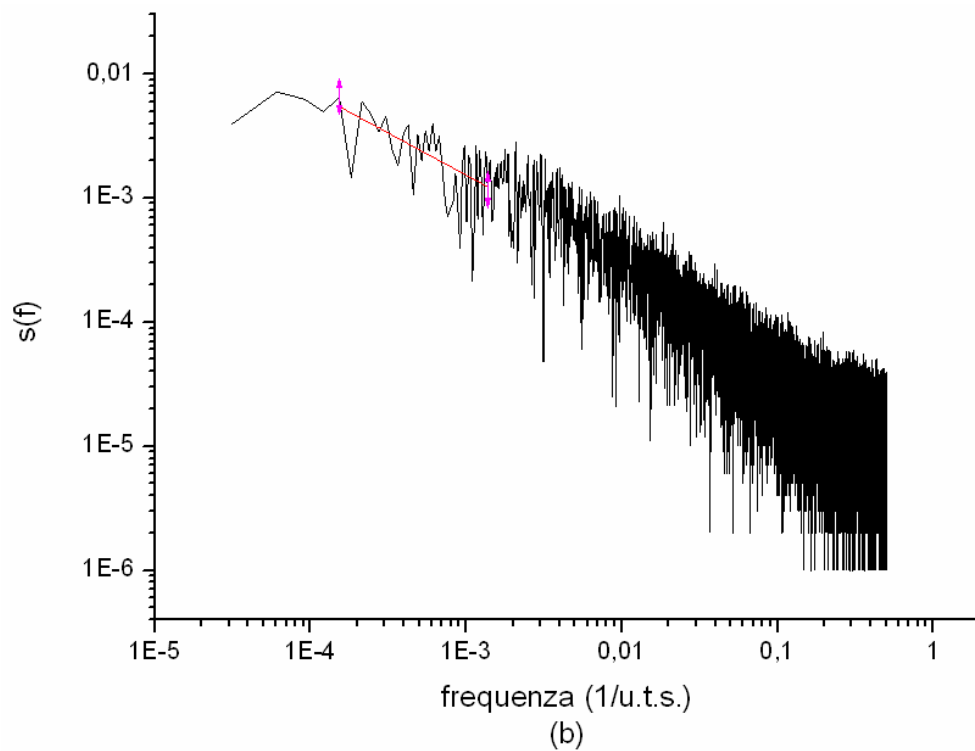
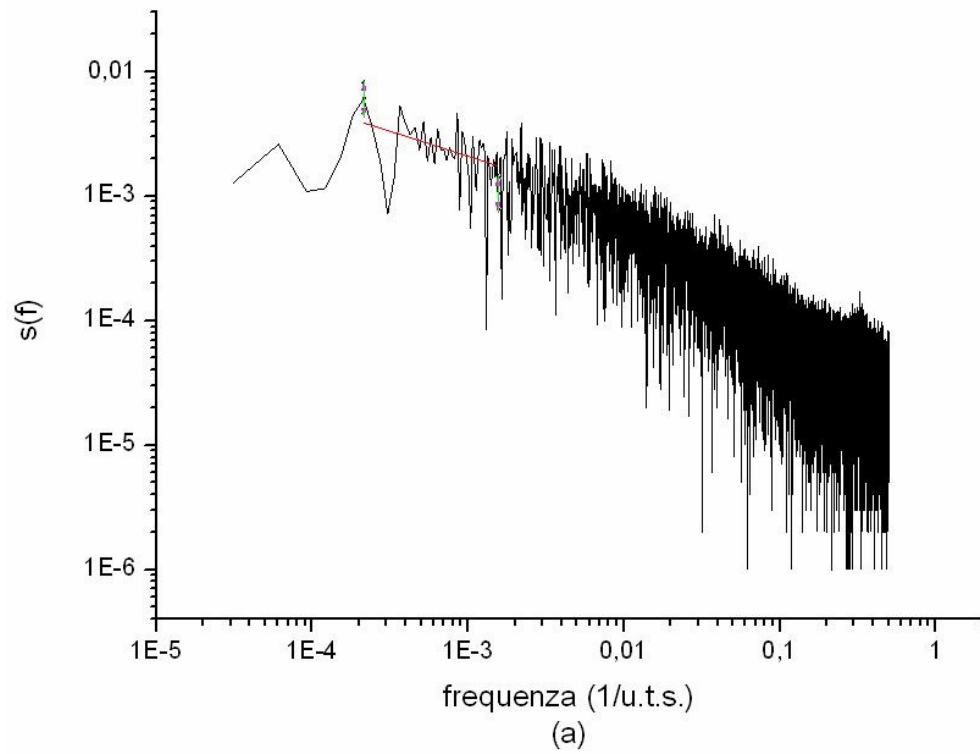


Fig. 4.8: Spettri di potenza (a) in regime ergodico e (b) in regime non ergodico. Il fit in (b), a differenza di quello in (a), non è coerente con la (4.1)

Per indagare più a fondo il mancato accordo nel caso non ergodico è stato fatto il grafico dello spettro di potenza di una rete non ergodica, ottenuta utilizzando il metodo della mappa di Manneville (vedi par. 3.3). Il risultato è praticamente identico alla fig. 4.8 (b). Il fatto che la discrepanza non sia influenzata in maniera notevole dalla modalità di incremento del potenziale indica che essa è il risultato di caratteristiche intrinseche al sistema. Tra di esse quella maggiormente in grado di minare l'esattezza della (4.1) è proprio la presenza di forti correlazioni tra i segnali che si vanno a sommare.

4.5 Complexity matching

L'ultimo risultato della teoria dei processi di rinnovo non poissoniani che verificheremo è forse il più impressionante: il complexity matching.

Come abbiamo visto nel primo capitolo, le correlazioni tra una perturbazione complessa ed un sistema dominato da eventi hanno l'andamento mostrato in figura 1.1.

La verifica diretta di questa previsione è stata fatta tramite 324 distinte simulazioni. In ognuna di esse una rete perturbante, avente indice di complessità μ_p , è stata fatta interagire con un'altra rete, avente indice di complessità μ_s . La connessione tra le reti è stata effettuata collegando le uscite di un decimo delle celle della prima con gli ingressi di altrettante celle della seconda. Al termine di ogni simulazione è stata calcolata la cross-correlation massima (χ).

Il risultato è il grafico in figura 4.9.

Come possiamo vedere, c'è una buona somiglianza con il grafico teorico di figura 1.1 riportato nel primo capitolo.

La maggiore discrepanza presente tra le due figure è dovuta alle correlazioni troppo basse per valori di μ_p lontani dall'ergodicità e μ_s alto. Questo indica che nel nostro caso una rete ergodica segue meno fedelmente del previsto una sollecitazione non ergodica.

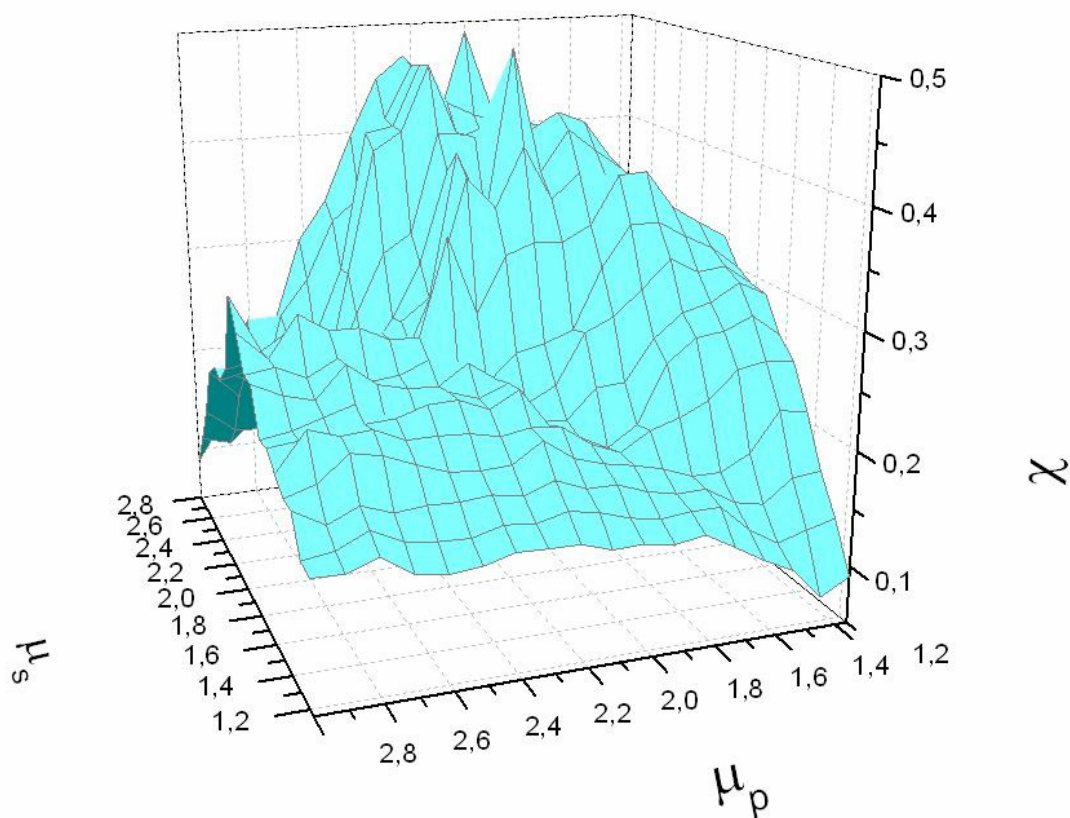


Fig. 4.9: Complexity matching: verifica diretta. La somiglianza col grafico 1.1 è evidente. Un sistema non ergodico non risponde a sollecitazioni ergodiche, mentre un sistema ergodico risponde a sollecitazioni non ergodiche.

In ogni caso l'accordo con la figura 1.1 è molto buono. Questa verifica apre interessanti prospettive, come lo studio di filtri “passa complesso” (una rete non ergodica risponde poco a sollecitazioni ergodiche) o la possibilità teorica di impedire il calo della complessità nell'attività del cervello, tipica di alcune malattie.

A tal proposito bisogna notare che, nonostante la verifica del complexity matching sia stata effettuata simulando l'influenza di una rete su un'altra con esponenti di scala diversi, all'atto pratico non è importante il meccanismo di perturbazione, ma ciò che conta è il suo μ .

Capitolo 5

Analisi delle dimensioni delle cascate

5.1 Analisi preliminari

Per studiare le proprietà delle cascate sono state create 22 reti con esponente di scala α compreso tra 1.4 e 3.2, ognuna composta da 310 celle. Purtroppo non è stato possibile isolare un singolo parametro che permettesse di variare con continuità α senza creare evidenti distorsioni. Ciò è dovuto al fatto che le impostazioni sono interdipendenti.

Il modello utilizzato presenta alcuni limiti, il cui superamento viene lasciato a studi futuri. Il limite più evidente è la presenza di un taglio per le cascate di grandi dimensioni. Come abbiamo visto nel terzo capitolo, in [2] gli autori dimostrano matematicamente che questo taglio è dovuto al fatto che la loro rete è costituita da un numero finito di celle. Il loro modello prevede una rete di neuroni a soglia totalmente interconnessi. Se non è in atto una valanga, il potenziale di un neurone scelto a caso viene aumentato di una quantità fissa.

Ho verificato che diminuendo il numero di celle il taglio si sposta su cascate di dimensioni minori (vedi fig. 4.1), ma questo test non è sufficiente per concludere che la causa sia la stessa: il modello considerato in [2] è molto più semplice di quello utilizzato in questo lavoro di tesi. Per questo motivo altre ipotesi circa le cause di questo difetto rimangono valide.

Una possibile spiegazione chiama in causa proprio il meccanismo con cui si fa evolvere il sistema. Le cascate, infatti, creano strutture auto-organizzate all'interno del sistema. Queste si concretizzano nelle relazioni esistenti tra i potenziali delle celle. Il fatto di aumentare il potenziale di un neurone **scelto a caso** può modificare e distruggere queste strutture. Gli effetti di questo disturbo si fanno sentire proprio sulle cascate più grandi perché esse si basano su catene di relazioni più lunghe.

Il taglio esponenziale può essere causato, ovviamente, anche dal fatto che il

sistema analizzato non operi attorno al punto critico. In altre parole, invece di esprimere *self organized criticality*, esso presenterebbe *self organized quasi-criticality* (vedi cap. 2). Durante i test è stato possibile creare reti con cascate prive di questo difetto, ma esse erano molto sensibili ai parametri, quindi non è stato possibile adattare ad esponenti di scala diversi. Inoltre, come vedremo tra breve, anch'esse con ogni probabilità erano di tipo SOqC. Uno studio più approfondito del modello da questo punto di vista va al di là degli scopi di questa tesi, ma potrebbe rivelare quali sono i parametri che devono essere regolati finemente e se tale regolazione è valida in generale o è specifica per il singolo caso.

Per verificare se il modello esprime SOC o SOqC, ricordando il paragrafo 2.2, è stato calcolato il valore di σ in funzione del parametro di scala. Esso fornisce il numero atteso di celle che si attivano a seguito del superamento della soglia da parte di un singolo neurone. La figura 5.1 mostra che, più ci allontaniamo dal valore teorico 1.5 per α , più σ diminuisce.

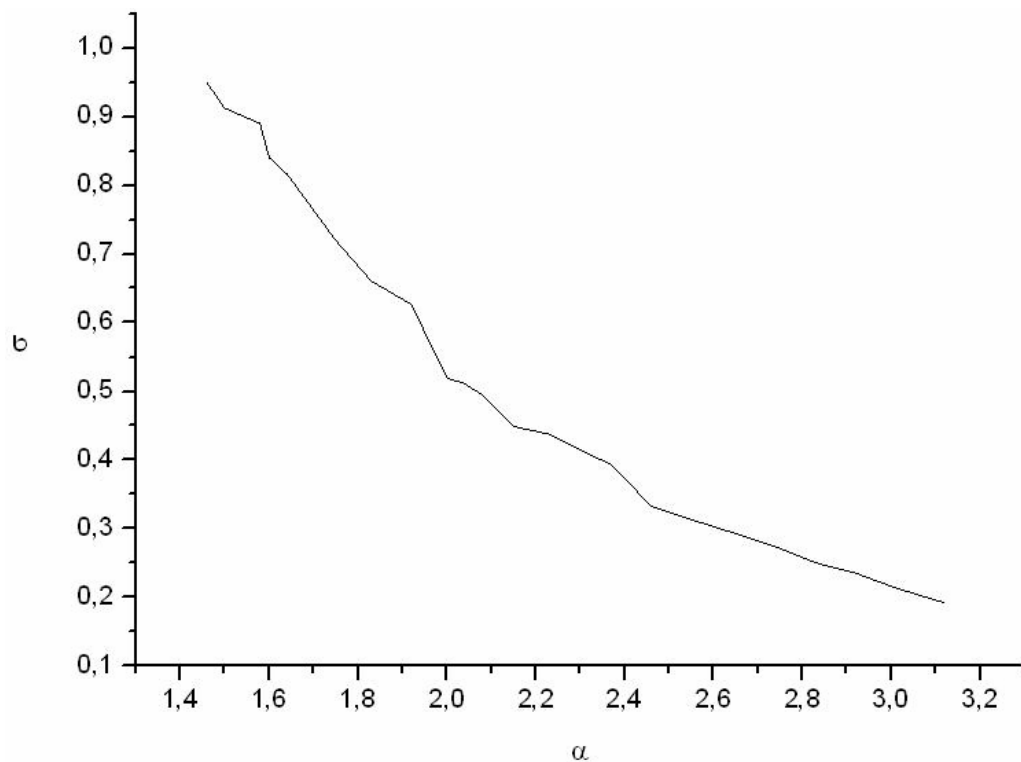


Fig. 5.1: Numero atteso di figli per padre in funzione dell'esponente di scala. σ molto minore di 1 indica che il sistema esprime SOqC

Poiché i valori sono generalmente parecchio lontani dall'unità, possiamo dire che il modello esprime la SOqC.

Bisogna notare che la rete che presenta il miglior andamento a potenza ($\alpha=2.87$), mostrato nella fig. 5.2, ha un σ pari a 0.28, che si discosta abbastanza da quello estrapolato dal grafico precedente senza tuttavia avvicinarsi al valore critico di 1. Con ogni probabilità, dato l' α di quasi 2.9, il numero di cascate della simulazione non è sufficiente per evidenziare il taglio esponenziale comunque presente per dimensioni maggiori.

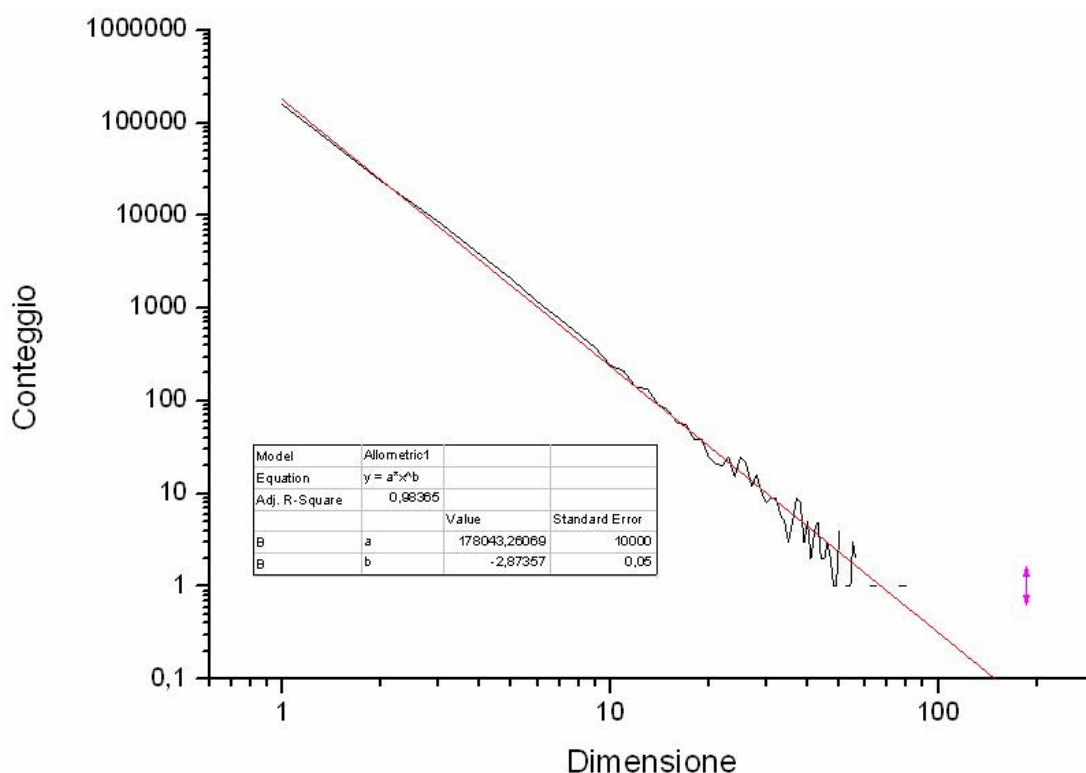


Fig. 5.2: Una simulazione che apparentemente non presenta taglio esponenziale. Il σ tuttavia è ben lontano da indicare criticità.

Le figure 5.3 (a) e (b) sono il risultato di due simulazioni di 200000 cascate con esponente di scala basso per la prima ed alto per la seconda. Dalle immagini risulta evidente il taglio per cascate di grandi dimensioni. Per cascate più piccole, l'accordo con una legge a potenza con $\alpha=1.46$ e $\alpha=2.68$ è ottimo, come si vede dai fit in rosso.

A prima vista la pendenza delle 5.3 potrebbe sembrare la stessa. In realtà, visto

che il numero di cascate è lo stesso in ogni simulazione, più α è grande e più la dimensione massima delle cascate è piccola.

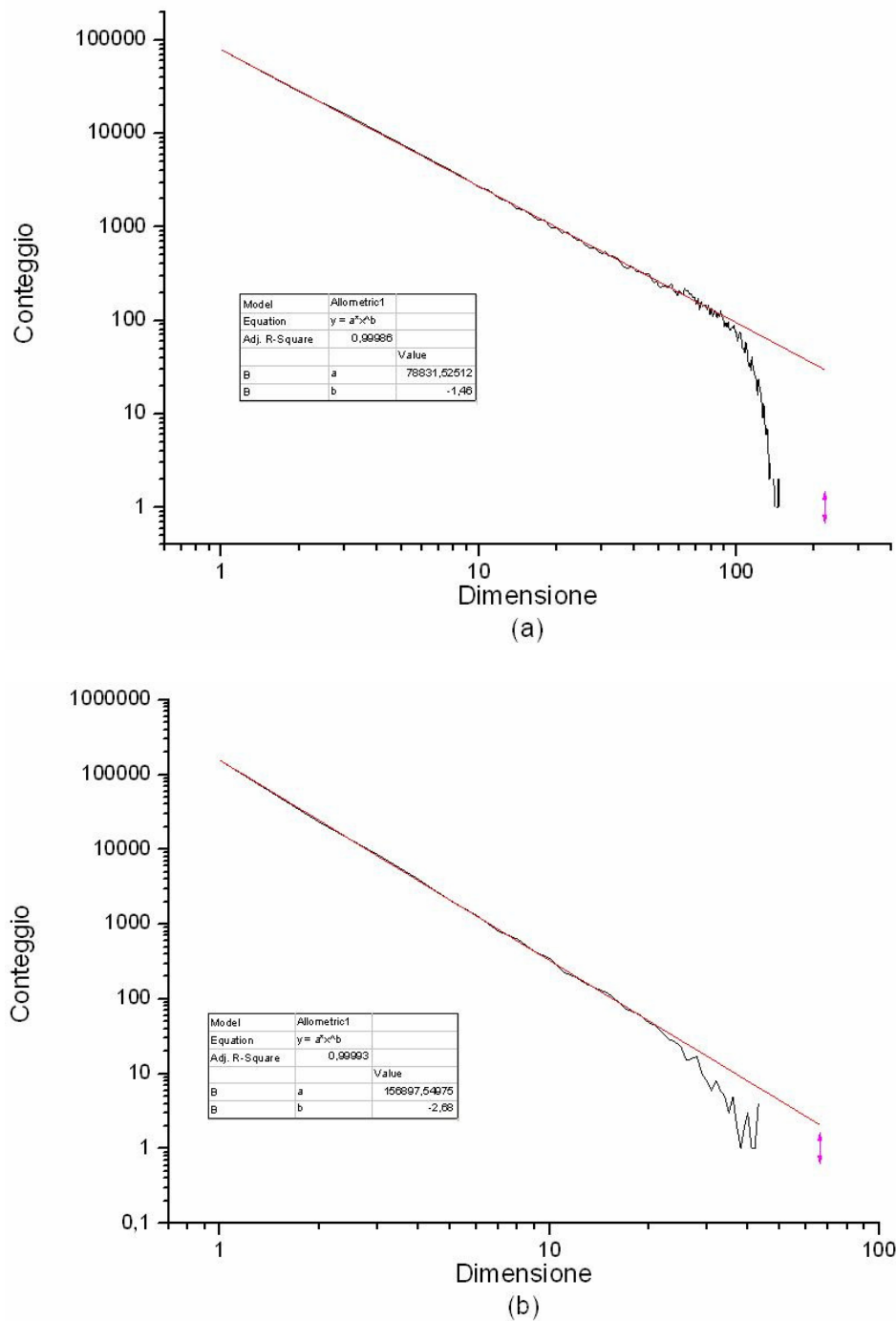


Fig. 5.3: Simulazione di 200000 cascate e fit con legge a potenza con (a) $\alpha=1.4$ e (b) $\alpha=2.68$. Ottimo l'accordo con il fit per cascate di dimensioni inferiori al taglio

Come anticipato, il modello non riproduce andamenti a potenza inversa per quanto riguarda i tempi di attesa tra una valanga e la successiva. Il grafico 5.4 (a) è un esempio dell'andamento tipico. In 5.4 (b) vediamo che l'andamento dei tempi di attesa è esponenziale.

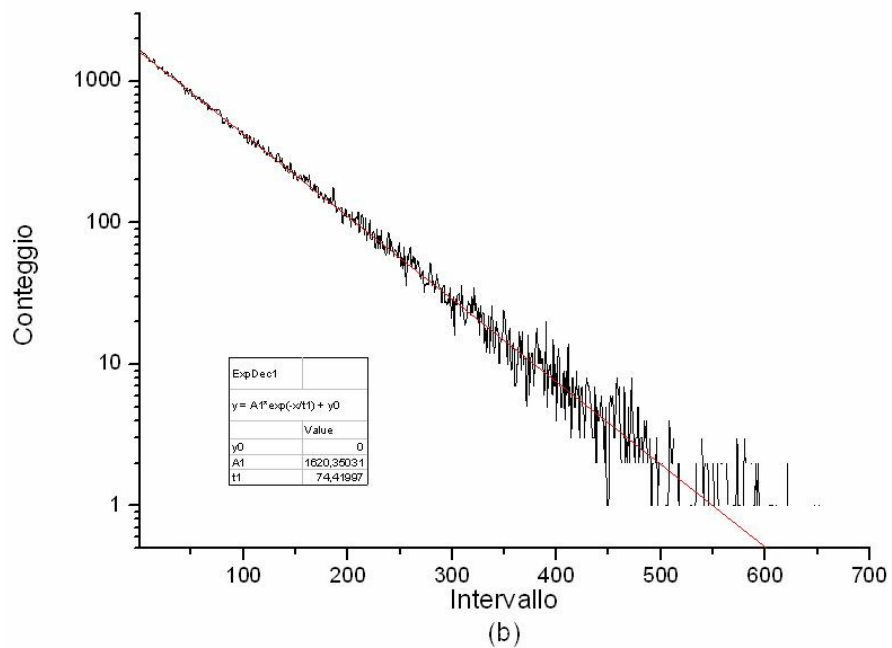
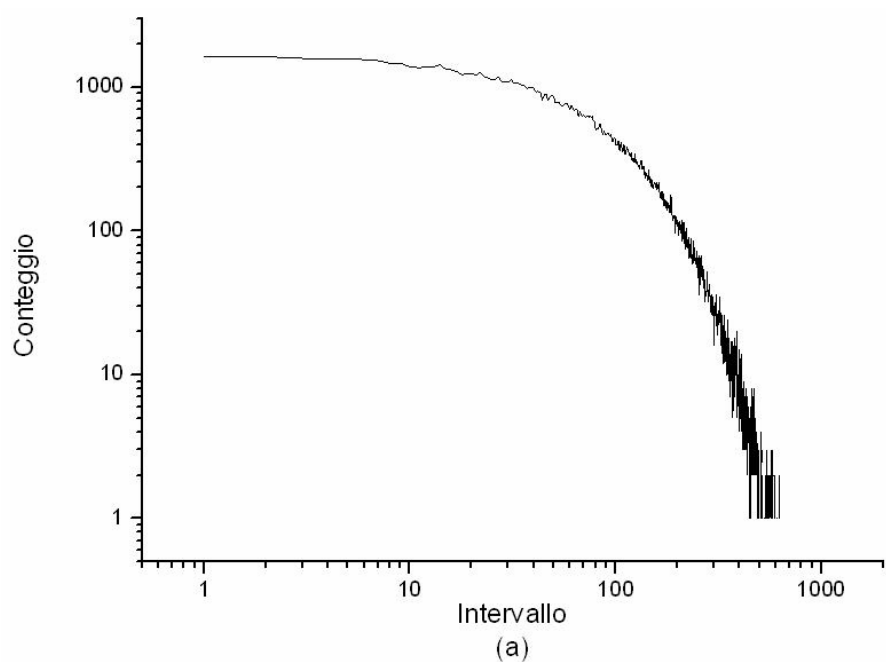


Fig. 5.4: Tempi di attesa tra le valanghe con $\alpha=1.46$. In (b) vediamo che l'andamento è esponenziale

Con l'intento di stimolare uno studio tra le relazioni che legano le molteplici distribuzioni che si ottengono andando ad analizzare le quantità che questo modello mette a disposizione, saranno riportati gli andamenti di alcune quantità senza il supporto di una base teorica.

Il grafico dell'attività delle reti (il numero di celle attive in un determinato istante) presenta un andamento a potenza inversa, ma il taglio è presente già per dimensioni molto basse, inferiori a 10 unità, come riportato in fig 5.5:

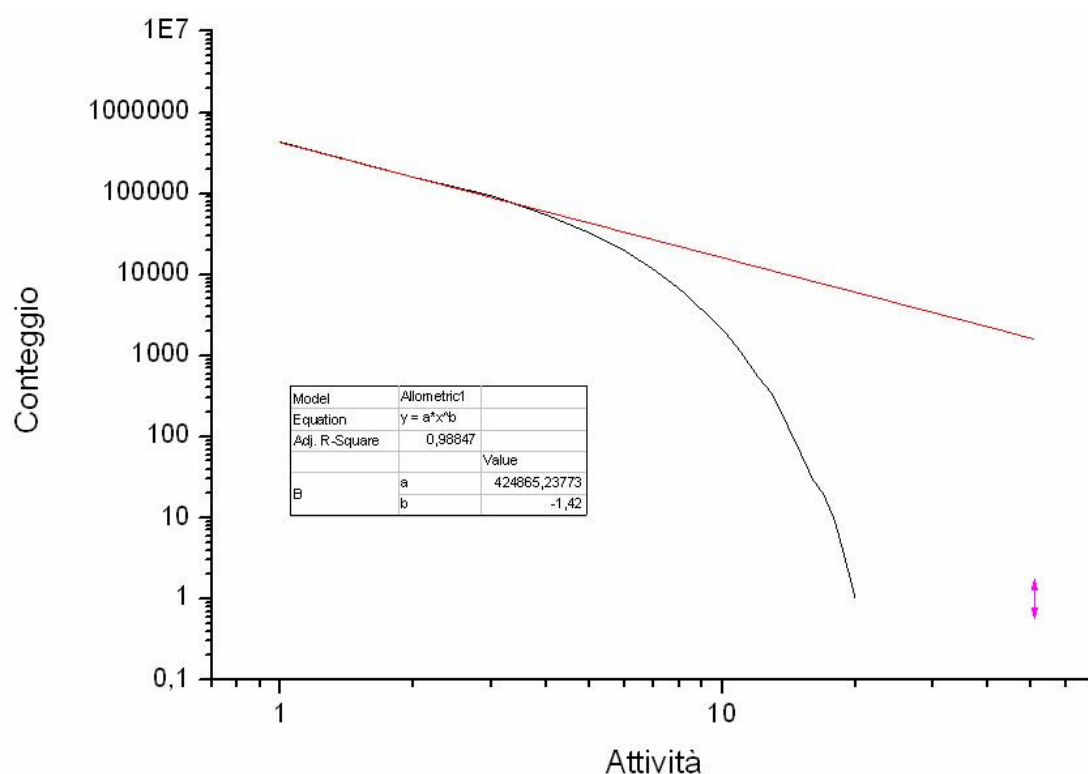


Fig. 5.5: Andamento del numero di celle attive in una singola u.t.s. Anch'esso presenta un andamento a potenza inversa, ma il taglio è presente già a valori molto bassi del numero di celle attive contemporaneamente.

Il grafico della durata di una singola cascata è influenzato fortemente dal periodo refrattario impostato (uguale per tutte le celle; l'esame di reti con periodi refrattari variabili da cella a cella va oltre lo scopo di questo lavoro). Nel caso di periodo refrattario unitario, l'andamento tipico è mostrato in fig. 5.6:

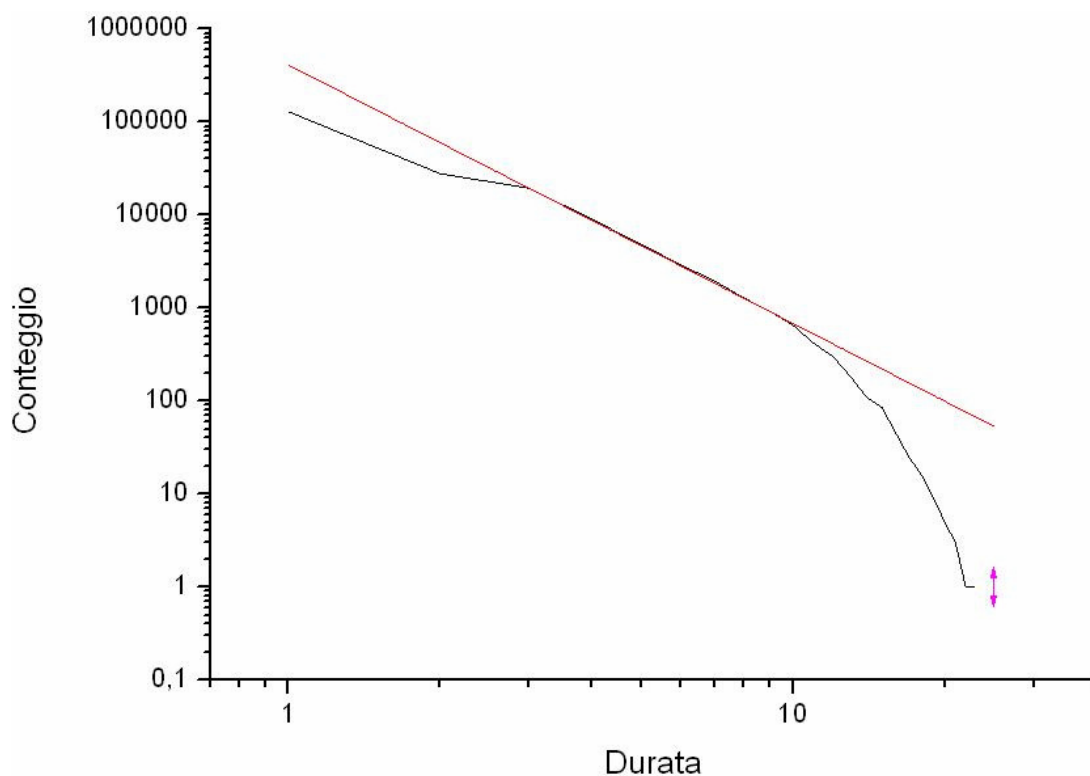


Fig. 5.6: Andamento della durata delle cascate con periodo refrattario di 1 u.t.s. Da notare, oltre al taglio esponenziale, l'andamento a potenza (fit in rosso) nella zona centrale del grafico.

Come si può notare, il grafico presenta il solito taglio esponenziale, un andamento pressoché a potenza inversa per dimensioni intermedie e una distorsione per durate inferiori a tre unità temporali. Annullando il periodo refrattario, la distorsione per tempi bassi viene eliminata.

Con periodo refrattario di 30 unità, invece, si riscontra l'andamento riportato in fig. 5.7. I picchi del grafico sono dovuti al fatto che le celle terminano il loro periodo refrattario e tornano disponibili per una seconda o terza attivazione all'interno della stessa cascata. Non è possibile fornire una spiegazione conclusiva per l'andamento quasi costante che il grafico evidenzia per le cascate di durata compresa tra 5 e 20 unità. Le simulazioni hanno dimostrato che la grandezza dell'intervallo su cui si presenta questo andamento dipendono dalla durata del periodo refrattario. Una ipotesi plausibile è che cellule che si sono attivate in cascate precedenti tornino ad essere disponibili durante una valanga, permettendo di allungarne la durata. In ogni

caso sono necessari ulteriori studi per identificare con certezza le cause di questo andamento.

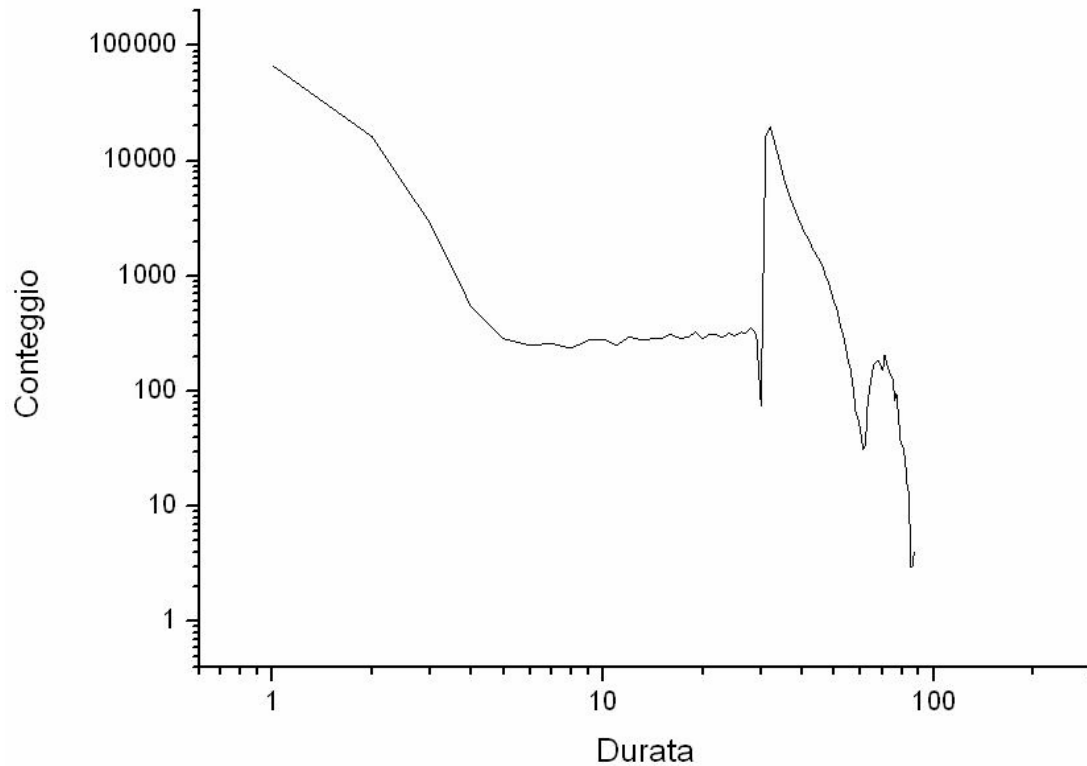


Fig. 5.7: Andamento della durata delle cascate con periodo refrattario di 30 u.t.s. I picchi sono in relazione con la fine dei periodi refrattari delle celle

Poiché in questo lavoro siamo interessati principalmente a distribuzioni che vanno come l'inverso di una potenza, a meno che non sia detto esplicitamente, l'analisi seguente riguarderà soltanto le dimensioni delle cascate, che rappresentano il miglior andamento da questo punto di vista.

5.2 Varianza

Volendo analizzare gli effetti delle perturbazioni sulle dimensioni delle cascate la scelta naturale per il segnale su cui effettuare i calcoli è proprio la successione delle dimensioni delle valanghe. Come abbiamo fatto nel capitolo precedente, esaminiamo l'andamento della deviazione standard normalizzata col valore medio del segnale al variare dell' α delle reti (le conclusioni circa la divergenza di σ valgono

anche in questo caso in quanto dipendono soltanto dall'andamento a potenza inversa del segnale che le determina).

Dal grafico 5.8 risulta evidente che, secondo quanto previsto dalla teoria, più ci si sposta verso α alti, più le fluttuazioni normalizzate con la media diminuiscono.

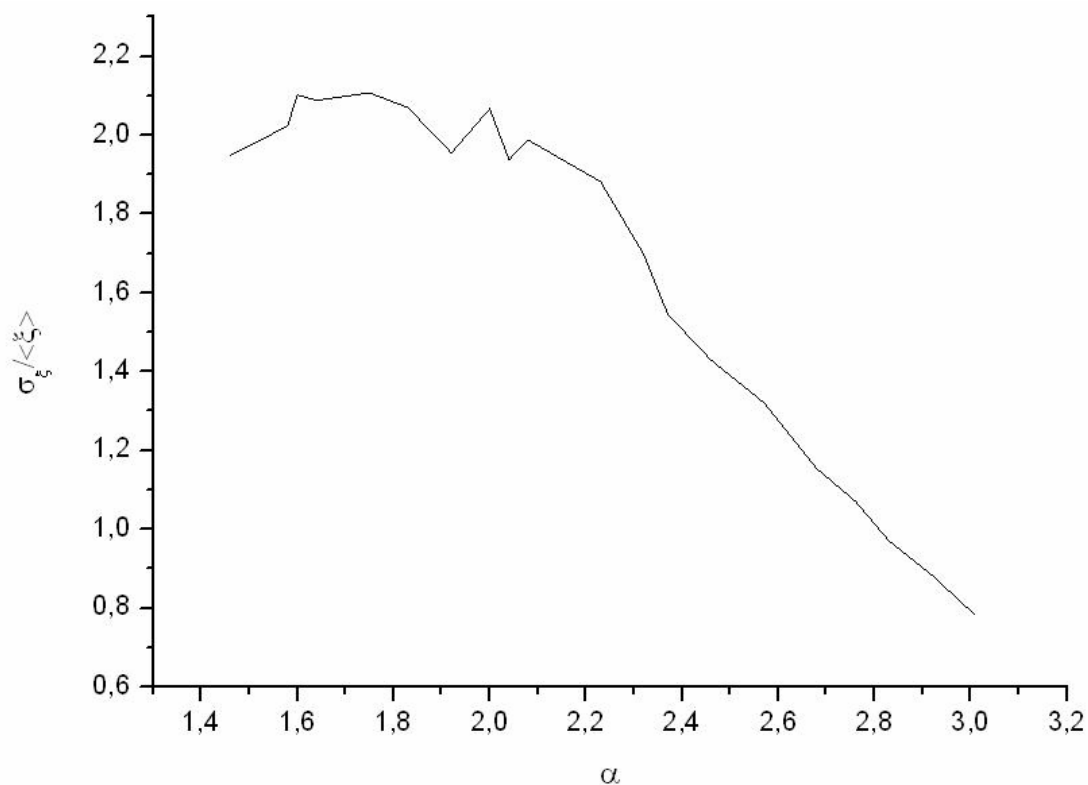


Fig. 5.8: Andamento della σ normalizzata col valore medio in funzione dell'esponente di scala. Anche in questo caso σ diminuisce all'aumentare dell'esponente di scala.

5.3 Spettro di potenza e autocorrelazione

Passiamo ora ad analizzare lo spettro di potenza, come abbiamo fatto nel capitolo precedente. Le figure 5.9 (a) e (b) mostrano i risultati di due simulazioni, la prima con $\alpha=1.46$ e la seconda con $\alpha=2.68$. Come possiamo vedere, entrambi i grafici presentano un andamento che si avvicina al rumore bianco nella parte intermedia. Bisogna notare che, forse, potrebbe emergere una struttura aumentando

ulteriormente la lunghezza del segnale. Questo test viene lasciato ad eventuali sviluppi futuri.

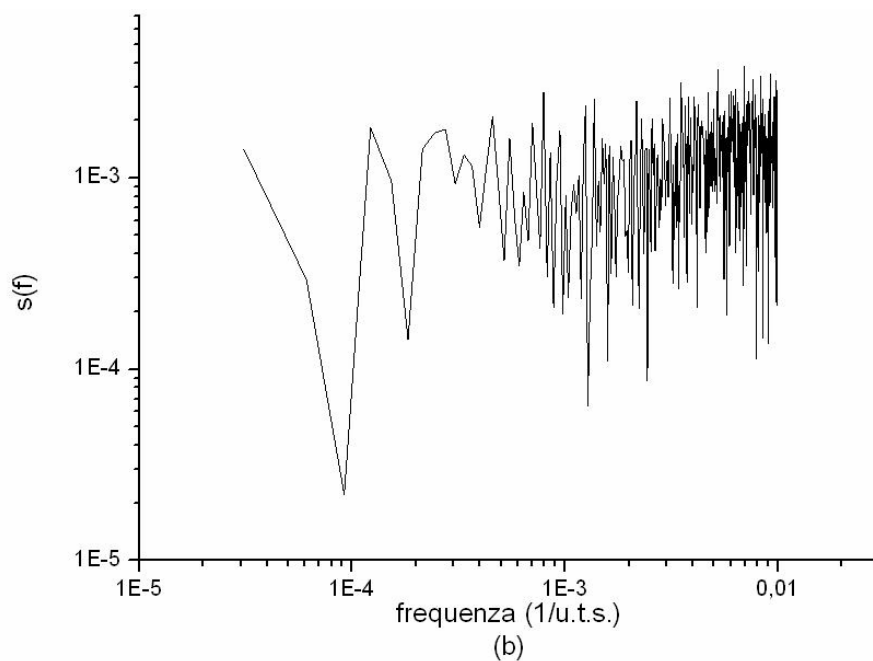
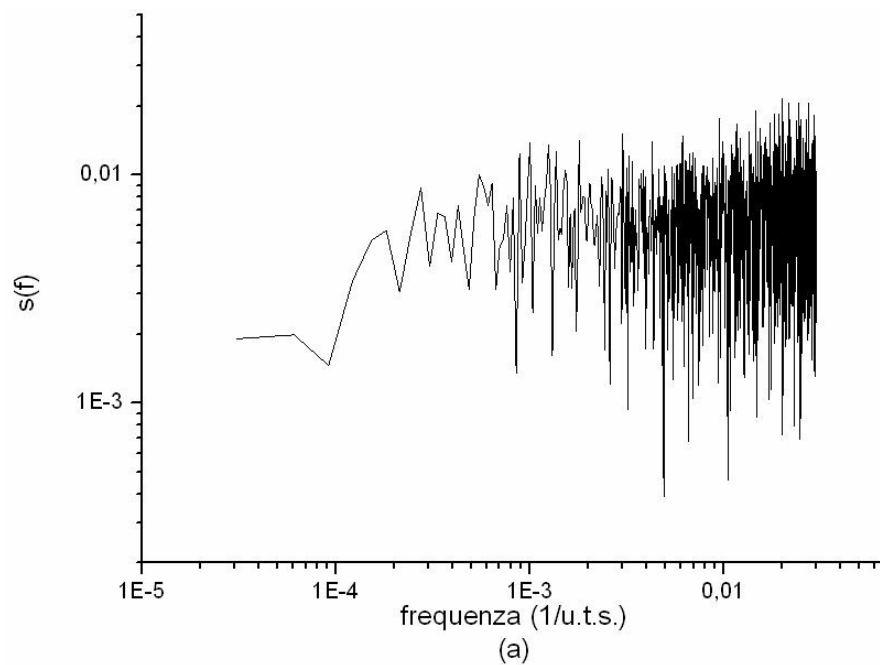


Fig. 5.9: Spettro di frequenza per la successione delle dimensioni delle cascate (a) $\alpha=1.46$ (b) $\alpha=2.68$. La regione intermedia presenta un andamento che si avvicina al rumore bianco.

Analizziamo adesso l'autocorrelazione del segnale, come abbiamo fatto nel capitolo precedente.

Il grafico 5.10 rappresenta l'autocorrelazione della successione delle dimensioni delle cascate con $\alpha=2.68$.

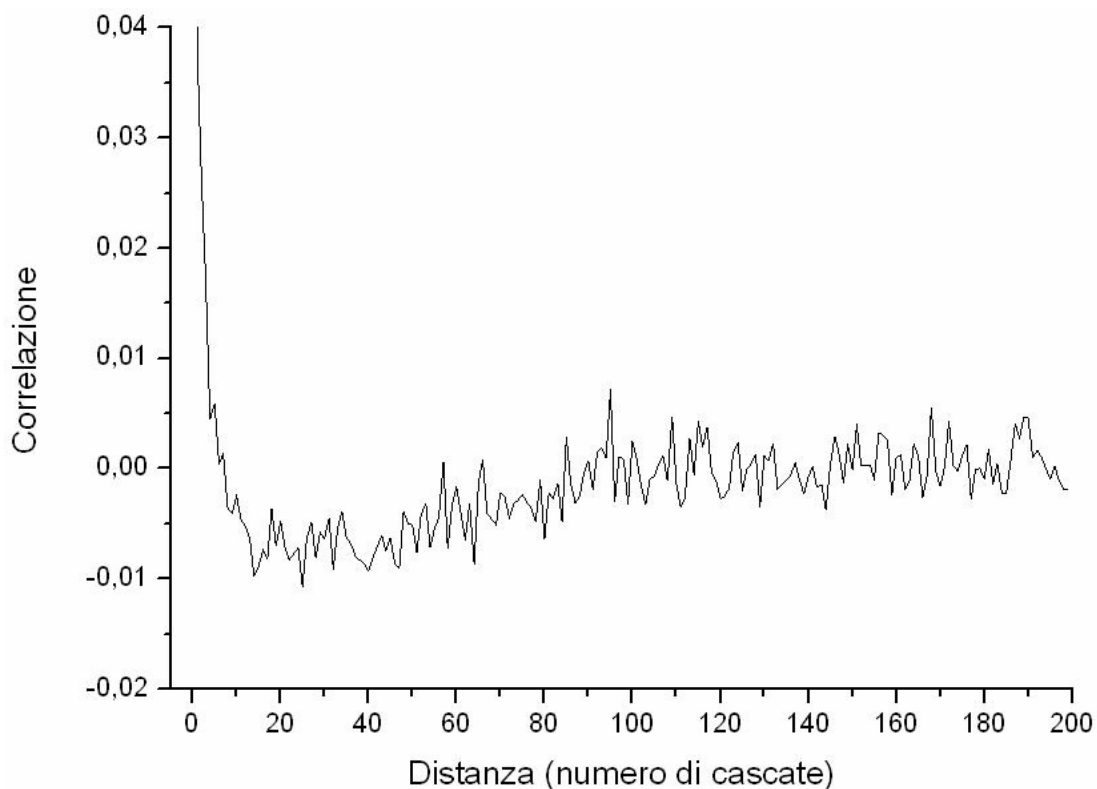


Fig. 5.10: Autocorrelazione con $\alpha=2.68$. Si nota un periodo di anticorrelazione di circa 100 cascate.

Si può chiaramente notare un periodo di anticorrelazione che dura circa 100 cascate. Ciò è dovuto al fatto che dopo alcune valanghe al di sopra o al di sotto della media, occorre tempo per riportare il neurotrasmettitore al livello medio.

Il grafico 5.11 rappresenta l'autocorrelazione di una rete che ha $\alpha=1.46$.

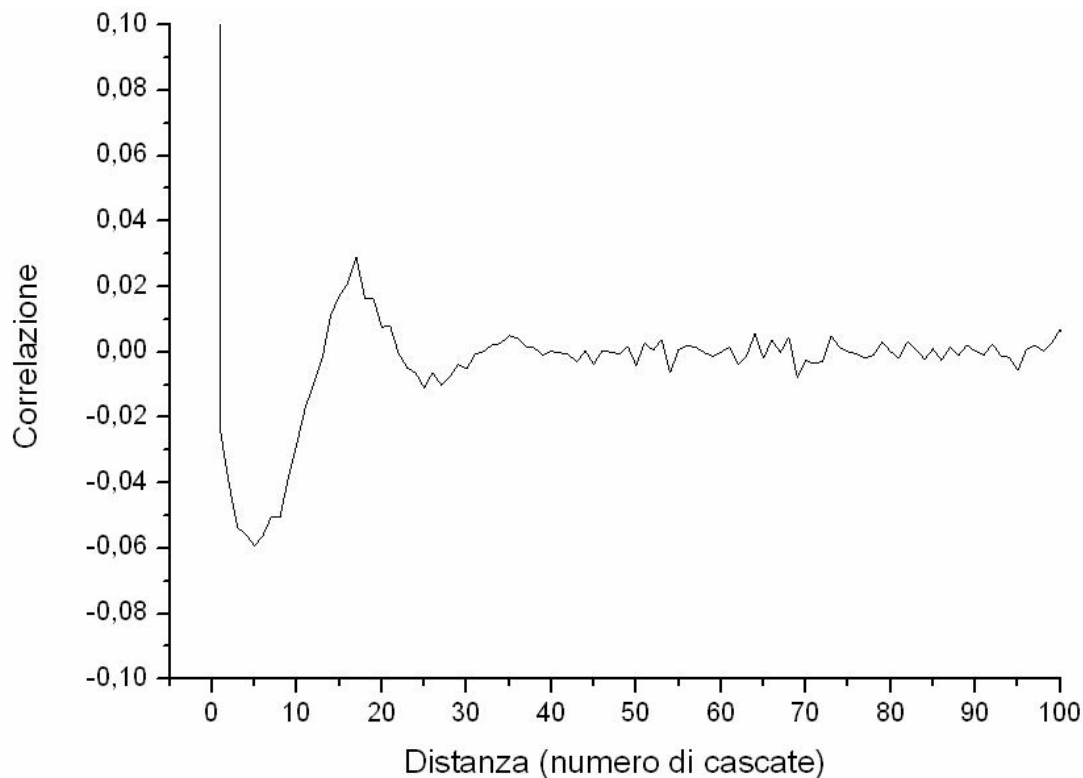


Fig. 5.11: Autocorrelazione con $\alpha=1.46$. Da notare la presenza di un sistema oscillante smorzato.

Si nota subito la presenza di un sistema oscillante smorzato. Ciò può essere spiegato dagli effetti del periodo refrattario in congiunzione col ciclo di feedback tra il neurotrasmettitore disponibile e le dimensioni delle cascate. Valanghe di grandi dimensioni consumano molto neurotrasmettitore e inattivano molte celle. Per questi motivi le cascate successive saranno necessariamente di piccole dimensioni. In questo periodo il neurotrasmettitore può ricaricarsi e sarà sopra il suo valore medio nel momento in cui terminano i periodi refrattari. Questo origina il picco attorno alle 18 cascate. Argomenti simili valgono per l'andamento seguente.

. Confrontando il valore assoluto dei picchi nei due grafici vediamo che, in analogia con quanto visto nel paragrafo 4.3, le correlazioni sono molto più forti con α più piccolo. Ciò è dovuto alle impostazioni dei parametri, che permettono una maggiore persistenza dei neurotrasmettitori.

Come abbiamo fatto nel capitolo precedente, compariamo tre funzioni di

autocorrelazione dello stesso sistema calcolate a partire da tempi diversi. Come possiamo vedere in fig. 5.12, al contrario di quanto accadeva per la NPR, in questo

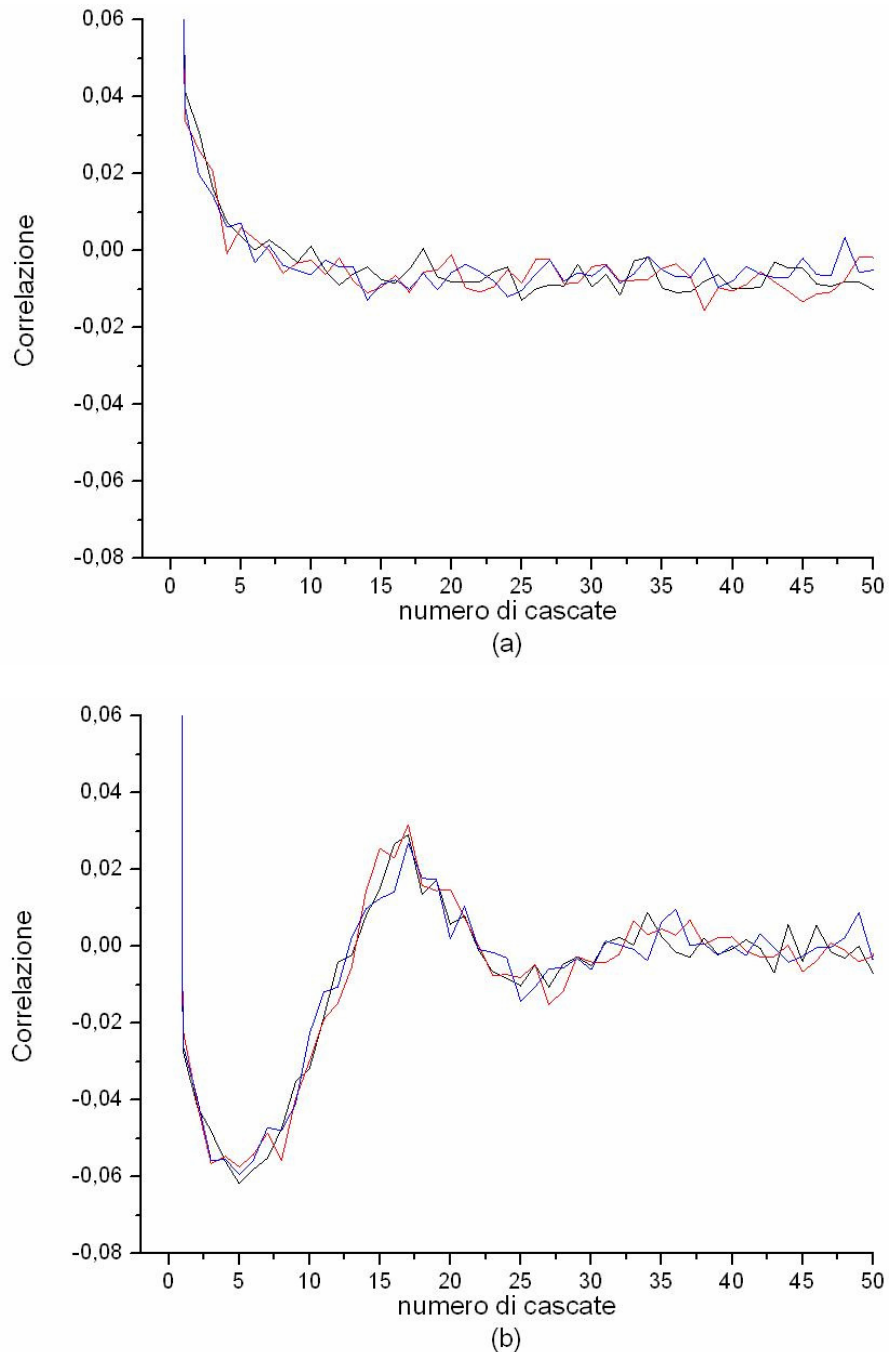


Fig. 5.12: Autocorrelazioni da parti diverse della sequenza di cascate della stessa simulazione. (a) $\alpha=2.68$ (b) $\alpha=1.46$. A differenza del capitolo precedente, adesso le funzioni sono sovrapponibili anche nel caso (b)

caso le tre funzioni sono sovrapponibili sia per $\alpha=2.68$ che per $\alpha=1.46$.

5.4 Perturbazione a gradino

Per verificare la (2.2) il sistema è stato sottoposto ad una perturbazione costante intermittente con periodo di 10000 cascate, per un totale di 2 milioni di cascate. In seguito le zone in cui il sistema rilassa sono state mediate.

Purtroppo questa prova non ha dato alcun esito in quanto il grafico risultante presentava ancora troppo rumore. Probabilmente il numero di rilassamenti utilizzati per effettuare la media era ancora troppo basso. Anche questo test viene lasciato ad eventuali sviluppi futuri.

5.5 Cross Correlation

Per studiare cosa accade se effettuiamo una prova analoga a quella del complexity matching, due reti con α noto sono state collegate in modo che il funzionamento autonomo della seconda fosse perturbato da segnali provenienti dalla prima. L'analisi della correlazione tra le fluttuazioni delle cascate del sistema perturbante e del sistema perturbato in funzione dei rispettivi α ha prodotto il grafico 5.15.

Come possiamo vedere anche in questo caso c'è una somiglianza molto marcata con la figura 1.1 per quanto riguarda la forma. A conoscenza dell'autore, le basi teoriche di questo risultato sperimentale devono essere ancora gettate. Esso viene proposto in questa sede come stimolo ad indagare in questa direzione.

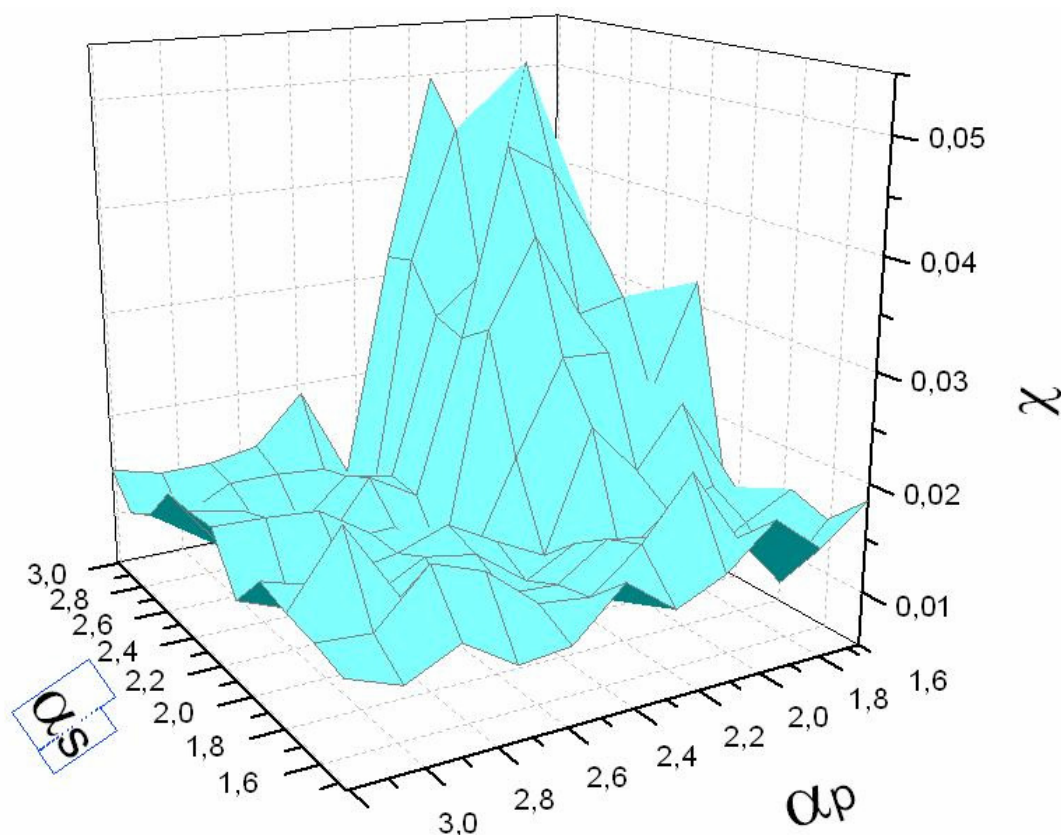


Fig. 5.15: Analogo del complexity matching per le correlazioni spaziali. Un sistema, qualunque sia il suo esponente di scala non risponde a perturbazioni con esponente di scala alto. La risposta massima si ha nel caso di sistemi con esponente di scala alto perturbati da segnali con esponente di scala basso.

Notiamo che le correlazioni sono piccole in valore assoluto, ma, nella zona in cui $\alpha_s > 2.0$ e $\alpha_p < 2.2$ circa, esse sono 3-5 volte più intense che negli altri casi.

Una spiegazione qualitativa può essere riassunta dicendo che cascate grandi nel sistema perturbante aumentano il potenziale medio di un sistema perturbato caratterizzato da valanghe piccole e favoriscono l'innalzarsi delle dimensioni delle valanghe in quest'ultimo. Se il sistema perturbato esprime già cascate di grandi dimensioni o se le cascate del sistema perturbante sono troppo piccole, l'influenza è trascurabile e non c'è correlazione.

Capitolo 6

Conclusioni e ulteriori sviluppi

6.1 Conclusioni

Nel corso di questa tesi sono state descritte la teoria dei processi di rinnovo non poissoniani, quella dei processi di ramificazione e la criticità auto organizzata. Per testare questi concetti sulle reti neurali è stato sviluppato un particolare modello che permette di ottenere leggi a potenza con esponenti variabili sia per le dimensioni delle cascate, sia per i tempi di attesa tra di esse.

Per quanto riguarda la verifica delle previsioni della teoria dei processi di rinnovo, è stato ottenuto il primo riscontro diretto (a conoscenza dell'autore) del fenomeno del perennial aging nel caso delle reti neurali.

La relazione che lega l'andamento dello spettro di potenza al μ è stata confermata solo qualitativamente in quanto nel caso non ergodico è presente una forte discrepanza. Essa è dovuta, con ogni probabilità, al fatto che i potenziali delle singole cellule non sono indipendenti e questo inficia le premesse per la validità della relazione in esame.

Un altro importante risultato della tesi è il primo riscontro diretto del fenomeno del complexity matching per questo tipo di sistemi.

Quest'ultimo risultato in particolare apre la strada sia alla possibilità di sviluppare oggetti dotati di peculiari capacità, come un ipotetico filtro passa-complesso, sia alla possibilità concreta di ideare dispositivi che permettano (quantomeno) la riduzione di malattie neurologiche causate da una riduzione della complessità nelle cascate neuronali del cervello.

Questo lavoro ha anche evidenziato alcune regolarità espresse dal modello utilizzato che necessitano ancora di una base teorica. Tra esse ricordiamo l'andamento a potenza dell'attività della rete e la presenza di correlazioni più lunghe nel caso di esponenti di scala bassi. Tuttavia, la più sorprendente è l'analogo del

complexity matching per le coordinate spaziali.

In conclusione, i risultati ottenuti permettono di affermare che le previsioni della teoria dei processi di rinnovo non poissoniani sono verificate dalle reti neurali che esprimono leggi a potenza.

6.2 Sviluppi futuri

Un primo sviluppo possibile di questo lavoro consiste nell'utilizzare il modello per verificare le previsioni della teoria NPR circa la risposta dei sistemi complessi a segnali a gradino e sinusoidali. Purtroppo non è stato possibile includere questo studio nel presente lavoro come era mia intenzione inizialmente.

Un ulteriore interessante sviluppo è quello di indagare le ragioni per cui il modello ha bisogno di un artificio per generare leggi a potenza sui tempi di attesa tra le cascate. Questo studio potrebbe rispondere anche alla domanda non banale circa l'esistenza di requisiti minimi affinché un sistema abbia leggi a potenza per gli intervalli di tempo che intercorrono tra gli eventi.

Potrebbe essere molto interessante anche indagare le eventuali regolarità dovute all'interazione tra le leggi a potenza dei tempi di attesa e quelle delle dimensioni delle cascate.

Un altro chiaro sviluppo possibile di questo lavoro consiste nella simulazione di reti più grandi con un modello più raffinato. In questo caso, per diminuire i tempi di attesa delle simulazioni, è possibile sfruttare le capacità di calcolo parallelo offerte dalle moderne schede grafiche. Con questo approccio, in linea teorica, i tempi possono essere ridotti anche di un fattore 1000.

Un ulteriore sviluppo molto interessante potrebbe essere la verifica sperimentalmente in vitro o in vivo dei possibili effetti terapeutici del complexity matching.

Bibliografia

- [1] P. Allegrini, M. Bologna, L. Fronzoni, P. Grigolini, L. Silvestri **Experimental quenching of harmonic stimuli: universality of Linear Response Theory** *Phys. Rev. Lett.* 103, 030602 (2009)
- [2] C. Eurich, J.M. Herrmann, U. A. Ernst **Finite-size effects of avalanche dynamics** *Physical Review E* 66, 066137 (2002)
- [3] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini e B. J. West **Fluctuation-dissipation theorem for event-dominated processes.** *Phys. Rev. Lett.*, 99(1):010603, 2007
- [4] P. Bak, C. Thang, K. Wiesenfeld **Self-organized criticality: an explanation of 1/f Noise.** *Phys. Rev. Lett.*, 59, 381, 1987
- [5] T. E. Harris, **The Theory of Branching Processes** Dover, New York, 1989
- [6] Stefano Zapperi, Kent Bækgaard Lauritsen, H. Eugene Stanley **Self-Organized Branching Processes: Mean-Field Theory for Avalanches** *Phys. Rev. Lett.* 75, 4071–4074 (1995)
- [7] Juan A Bonachela and Miguel A Muñoz J. **Self-organization without conservation: true or just apparent scale-invariance?** *Stat. Mech.* (2009) P09009
- [8] P. Alstrøm, **Mean-field exponents for self-organized critical phenomena** *Phys. Rev. A* 38, 4905–4906 (1988)
- [9] M. P. Nawrot, C. Boucsein, V. Rodriguez-Molina, A. Aertsen, S. Grün, S. Rotter **Serial interval statistics of spontaneous activity in cortical neurons in vivo and in vitro** *Neurocomputing* v.70 n.10-12, p.1717-1722, June, 2007
- [10] J. M. Beggs, D. Plenz **Neuronal Avalanches in Neocortical Circuits** *The Journal of Neuroscience*, December 3, 2003, 23(35):11167-1117
- [11] D. R. Chialvo **The brain near the edge** 9th Granada Seminar on Computational Physics
- [12] A. Levina, J. M. Herrmann, T. Geisel **Dynamical Synapses Causing Self-Organized Criticality in Neural Networks** *Nature Physics* 3, 857 - 860 (2007)

- [13] P. Allegrini, P. Grigolini, L. Palatella, B. J. West **Non-Poisson dichotomous noise: higher-order correlation functions and aging** *Phys. Rev. E* 70, 046118 (2004)
- [14] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume **Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics** *Springer series in Solid-State Sciences* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1991
- [15] L. Onsager **Reciprocal relations in irreversible processes i** *Phys. Rev.* 37:405 (1931)
- [16] P. Allegrini, G. Ascolani, M. Bologna, P. Grigolini **Renewal aging and linear response** *cond-mat/0602284*, submitted to *Phys. Rev. E*, 2006
- [17] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini, M. Lukovic **Response of complex systems to complex perturbation: complexity matching** *cond-mat/0608341* (2006)
- [18] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini, B. J. West **Response of complex systems to complex perturbation: the complexity matching effect** *cond-mat/0612303* (2006)
- [19] D. Millman¹, S. Mihalas¹, A. Kirkwood¹, E. Niebur **Self-organized criticality occurs in non-conservative neuronal networks during Up states** *Nature Physics* Published online: 5 September 2010 doi:10.1038/nphys1757
- [20] M. Paczuski, S. Maslov, P. Bak **Avalanche Dynamics in Evolution, Growth, and Depinning Models** *Phys. Rev. E* 53, 414–443 (1996)
- [21] L. Silvestri **Eventi di rinnovo e risposta lineare nella turbolenza debole dei cristalli liquidi nematici** Tesi di laurea specialistica *etd-09302008-161441*
- [22] P. H. Handel **Quantum 1/f noise integrated bibliography** <http://www.umsl.edu/~handelp/QuantumBib.html>
- [23] W. Li **A bibliography on 1/f noise** <http://www.nslj-genetics.org/wli/1fnoise>.
- [24] P. Grigolini. Lecture notes.

- [25] J. M. Beggs, D. Plenz **Neuronal Avalanches Are Diverse and Precise Activity Patterns That Are Stable for Many Hours in Cortical Slice Cultures** *The Journal of Neuroscience*, 24(22):5216-5229; doi:10.1523/JNEUROSCI.0540-04.2004
- [26] J. A. Bonachela, S. de Franciscis, J. J. Torres, M. A. Muñoz **Self-organization without conservation: are neuronal avalanches generically critical?** *J. Stat. Mech.* (2010) P02015 doi: 10.1088/1742-5468/2010/02/P02015
- [27] J. M. Carlson, J. Doyle **Highly optimized tolerance: A mechanism for power laws in designed systems** *Phys. Rev. E*, 60 (2). pp. 1412-1427. ISSN 1063-651X
- [28] L. Silvestri, L. Fronzoni, P. Grigolini, P. Allegrini **Event-driven power-law relaxation in weak turbulence** *Phys Rev Lett.* 2009 Jan 9;102(1):014502. Epub 2009 Jan 5.
- [29] P. Allegrini, D. Menicucci, R. Bedini, L. Fronzoni, A. Gemignani, P. Grigolini, B. J. West, P. Paradisi **Spontaneous brain activity as a source of ideal 1/f noise** *Phys. Rev. E* 80, 061914 (2009)
- [30] S. Dehaene, J-P. Changeux **Ongoing spontaneous activity controls access to consciousness: a neuronal model for inattentional blindness** *PLoS Biol*, 3(5):e141, May 2005
- [31] C. W. Eurich, J. M. Herrmann, U. A. Ernst **Finite-size effects of avalanche dynamics** *Phys. Rev. E* 66, N° 6. (2002), 066137.
- [32] M. Tsodyks, T. Kenet, A. Grinvald, A. Arieli **Linking spontaneous activity of single cortical neurons and the underlying functional architecture** *Science*, **286**, 1943-1946 (1999)
- [33] R.W. Rodieck, N.Y.-S. Kiang, G.L. Gerstein **Some Quantitative Methods for the Study of Spontaneous Activity of Single Neurons** *Biophysical Journal* Volume 2, Issue 4, 351-368, 1 July 1962 doi:10.1016/S0006-3495(62)86860-X
- [34] G. Bel and E. Barkai **Weak Ergodicity Breaking in the Continuous-**

Time Random Walk *Phys. Rev. Lett.* 94, 240602 (2005)

[35] L. de Arcangelis, H.J. Herrmann, C. Perrone-Capano **Neuronal avalanches and brain plasticity** *AIP Conference Proceedings*, V. 965, pp. 237-244 (2007)

[36] Y. Frégnac, M. Rudolph, A. P. Davison, A. Destexhe **Complexity in neuronal networks** *Biological Networks*, Ed. by Kepes, F. World Scientific, Singapore, pp. 291-340 (2007).

[37] D. E. Juanico, C. Monterola, C. Saloma **Self-organized critical branching in systems that violate conservation laws** *New J. Phys.* 9 92 doi: 10.1088/1367-2630/9/4/092

[38] <http://www.izhikevich.org>

[39] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld **Self-organized criticality** *Phys. Rev. A* 38, 364–374 (1988)

[40] W. S. McCulloch, W. Pitts **A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity** *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol. 5, pp. 115–133 (1943)

[41] J. Davidsen, M. Paczuski **$1/f^\alpha$ noise from correlations between avalanches in self-organized criticality** *Phys. Rev. E* 66, 050101(R) (2002)

[42] W. L. Shew, H. Yang, T. Petermann, R. Roy, D. Plenz **Neuronal Avalanches Imply Maximum Dynamic Range in Cortical Networks at Criticality** *The Journal of Neuroscience* 29(49):15595–15600 (2009)

[43] C.T. Kello, G.D. Brown, R. Ferrer-I-Cancho, J.G. Holden, K. Linkenkaer-Hansen, T. Rhodes, G.C. Van Orden. **Scaling laws in cognitive sciences** *Trends Cogn Sci.* 2010 May;14(5):223-32. Epub 2010 Apr 1.

[44] C. Adami, J. Chu **Critical and near-critical branching processes** *Phys. Rev. E* 66, 011907 (2002)

[45] S. Hergarten **Landslides, sandpiles, and self-organized criticality** *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 3, 505-514, 2003

Ringraziamenti

Innanzitutto desidero ringraziare il mio relatore, il prof. Leone Fronzoni per l'estrema disponibilità e gentilezza con cui mi ha seguito, per la pazienza che ha avuto nei lunghi periodi in cui non mi potevo dedicare a questa ricerca per cause di forza maggiore, per la sua capacità di instillare curiosità verso i fenomeni naturali e soprattutto per la sua umanità.

Vorrei inoltre ringraziare in maniera particolare il dott. Paolo Allegrini e il dott. Paolo Paradisi per le conversazioni che abbiamo avuto riguardo all'argomento trattato in questa tesi e non solo: sono state molto importanti per arricchire questo scritto e me stesso.

Alla mia famiglia va un ringraziamento speciale. A mio padre per il suo esempio costante, la bontà, la gentilezza e l'affetto che respiro ogni volta che siamo vicini. A mia madre per avermi insegnato il valore della generosità, della curiosità e della voglia di vivere... nonché per rappresentare una spinta affinché io "impari la pazienza". Alla Muppia per le risate e la complicità che ci lega nonostante le nostre vite siano parecchio distanti. A nonno Orfeo, nonostante non possa più leggere queste righe, perché è stata una grande persona senza la quale non sarei ciò che sono oggi. A nonna Giovanna e nonno Stefano, che sarebbero felicissimi di sapere i traguardi che ho raggiunto. A nonna Giovanna, con la quale ho passato tanti pomeriggi da piccolo.

Un grazie enorme va a Patti, Mole Mole, per l'amore e la pazienza infiniti che mi ha dato in questi anni ed in questi ultimi mesi in particolare.

Un ringraziamento speciale va a Monica, che mi ha aiutato ad aprire gli occhi, Alice e Aldo, per la bellissima amicizia a distanza che ci lega, Sara, per la gioia che la circonda (e per i Crisbì...), Chiara, che mi sopporta da quasi 20 anni e Serena, per

l'affetto che ci unisce.

Un grande abbraccio va a tutti i parenti di Patti per la disponibilità e per la bellissima atmosfera che si respira in loro compagnia.

A tutti i miei colleghi di lavoro va un sentito grazie per la pazienza, l'amicizia e l'affetto di questi anni.

Ringrazio gli amici del calcio, del volley e del beach volley per l'amicizia e le sfide continue senza le quali le tensioni quotidiane sembrerebbero molto più grandi di quello che in realtà sono.

Ringrazio anche Riccardo, il mio fisioterapista, che, sorridendo, mi rimette sempre a posto.

Vorrei inoltre ringraziare tutti i miei amici e le persone che sono o sono state importanti nella mia vita: Claudio, Paolo, Carlo, Marianna, Chiara S., Chiara P., Elena T., Elena L., Francesca B., Irene, Riccardo, Anna, Marika, Consuelo, Claudia, Daniele, Jacopo, Luca R., Roberto, Eleonora, Giorgio, Giusy, Sonia, Viviana, Alessandro C., Sara G., Andrea G., Isabella, Marco, Damiana, Daniela, Valentina, il ragazzo che mi ha aiutato quando mi sono rotto i legamenti della spalla e tutte le persone che non mi vengono in mente di getto dopo numerose notti insonni...